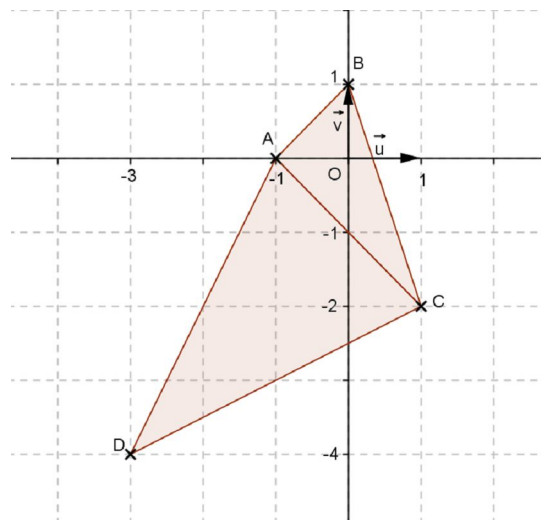


Matière : Mathématiques

Exercice 1 (5 points)

- ✓ **Contenu** : Nombres complexes- géométrie.
- ✓ **Aptitudes visées** : Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, connaître la nature d'un triangle et les propriétés caractéristiques d'un parallélogramme.
- ✓ **Corrigé** :
 - 1) a) $z_D = -3 - 4i$



b) $AB = |1 + i| = \sqrt{2}$; $AC = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$; $BC = |1 - 3i| = \sqrt{10}$

L'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$ permet de conclure que ABC est un triangle rectangle en A. (D'après le théorème de Pythagore).

On montre de même que $DA = DC = 2\sqrt{5}$ et on en déduit que ACD est un triangle isocèle de sommet principal D. ($AC = 2\sqrt{2} \neq 2\sqrt{5}$)

- 2) a) ABMN est un parallélogramme si et seulement si
- $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A, B, M \text{ et } N \text{ ne sont pas alignés} \quad (1) \\ \overline{AB} = \overline{NM} \quad (\text{ou } [AM] \cap [BN] \text{ ont même milieu}) \quad (2) \end{array} \right.$

(2) $\Leftrightarrow 1+i = z - z^2 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 + i = 0$

b) $z^2 - z + 1 + i = 0$

$\Delta = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$

On trouve $z = i$ ou $z = 1 - i$

- Si $z = i$ alors $M = B$ et $N = A$ par suite ABMN n'est pas un parallélogramme.

- Si $z = 1 - i$ alors ABMN est un parallélogramme.

Exercice 2 (5points)

- ✓ **Contenu** : Déterminant d'une matrice d'ordre 3, inverse d'une matrice d'ordre 3, système linéaire 3×3 .
- ✓ **Aptitudes visées** : Calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 3, reconnaître l'inverse d'une matrice d'ordre 3, résoudre un système linéaire 3×3 .
- ✓ **Corrigé** :

- 1) $\det A = 1 \neq 0$ alors la matrice A est inversible.
- 2) a) Pour tout réel α , $\det M_\alpha = \alpha \neq 0$ alors M_α est inversible.

$$b) A \times M_\alpha = I_3 \text{ équivaut } \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On trouve } \alpha = 1 \text{ et par suite } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3) (S) \Leftrightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(1, -1, 1)\}$$

Exercice 3 (4 points)

- ✓ **Contenu** : Arithmétique
- ✓ **Aptitudes visées** : Modéliser une situation par une équation du type: $ax + by = c$, connaître et appliquer la formule relative à la somme des termes d'une suite géométrique, connaître et utiliser les propriétés de la divisibilité dans \mathbb{Z} , calculer le pgcd de deux entiers, reconnaître que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans \mathbb{Z}^2 , des équations du type: $ax + by = c$.
- ✓ **Corrigé** :

- 1) a) S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison 4 et de premier terme 1.

$$S_n = \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 4^{n+1} - 3S_n = 1$$

$$b) \text{ On remarque que } 256 = 4^{3+1} \text{ et } 85 = S_3.$$

On sait que $4^{3+1} - 3S_3 = 1$ (d'après a)); alors on en déduit que $(1, 3)$ est une solution particulière de l'équation $256x - 85y = 1$. (1)

$$\text{On trouve } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(85k + 1, 256k + 3), k \in \mathbb{Z}\}$$

- 2) On désigne par x le prix d'achat d'un ordinateur de bureau et par y celui d'un ordinateur portable. Alors $256x - 5 = 85y$ ou bien $256x - 85y = 5$ (2)

On remarque d'après 1) b) que $x = 5(85k+1)$ et $y = 5(256k+3)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$400 \leq x \leq 500 \text{ équivaut } 400 \leq 85k+5 \leq 500.$$

On trouve $k = 5$ et par suite $x = 430$ D et $y = 1295$ D.

Exercice 4 (6 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter un graphique pour donner : le tableau de variation et le signe d'une fonction, une équation d'une asymptote - Etudier les variations d'une fonction, reconnaître un axe de symétrie de la courbe, étudier les branches infinies, tracer l'allure de la courbe d'une fonction.
- ✓ **Corrigé :**

1) a)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

b) f admet un minimum absolu en 2 qui est 1 ; alors pour tout réel x , $f(x) \geq 1$ et par suite $f(x) > 0$.

c) (AB) : $y = x - 3$.

2) a) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f(x) > 0$; alors $g = \ln f$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

b) Pour tout réel x , $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3) a) Pour tout réel x , $g(4-x) = \ln[f(4-x)] = \ln[f(x)] = g(x)$.

Alors la droite $D : x = 2$ est un axe de symétrie de C_g .

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln[f(x)]}{f(x)} \times \frac{f(x)}{x} = 0$$

Alors la courbe C_g admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

c) L'allure de C_g se traduit par les variations de g en précisant les branches paraboliques dont la direction est celle de l'axe des abscisses et en utilisant la droite $D : x = 2$ comme un axe de symétrie de C_g .

