

# MATHS

## Section : Maths

### 2<sup>ème</sup> Session

#### EXERCICE 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt$ .

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

- 1) Pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) \geq 0$ .
- 2) Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) \geq 0$ .
- 3)  $f(2) \leq \ln 2$ .

#### Contenu

- Fonction définie par intégrale.
- Signe d'une intégrale.
- Comparaison de deux intégrales.

#### Solutions

1. **Vrai.** En effet :  $g : x \mapsto \frac{\cos^2 x}{x}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et  $1 \in ]0, +\infty[$  donc  $f$  est la primitive de  $g$  sur  $]0, +\infty[$  qui s'annule en 1. Donc  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x > 0$  ;  $f'(x) = \frac{\cos^2 x}{x} \geq 0$ .
2. **Faux.** Car pour  $0 < x < 1$  ;  $\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt \leq 0$ .
3. **Vrai.** En effet  $\frac{\cos^2 t}{t} \leq \frac{1}{t}$  pour tout  $t \in [1, 2]$  donc  $f(2) = \int_1^2 \frac{\cos^2 t}{t} dt \leq \int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^2 = \ln 2$ .

#### EXERCICE 2

Pour tout entier naturel  $p$  supérieur ou égal à 3, on désigne par  $f_p$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$f_p(x) = p(\ln x) - x$ , où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien. On note  $(C_p)$  la courbe représentative de  $f_p$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

A-1) Etudier les variations de la fonction  $f_3 : x \mapsto 3\ln x - x$ .

- 2) Montrer que l'équation  $f_3(x) = 0$  admet exactement deux solutions, notées  $u_3$  et  $v_3$ , appartenant respectivement aux intervalles  $]1, 3[$  et  $]3, +\infty[$ .
- 3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de  $f_p$  pour  $p \geq 3$ .

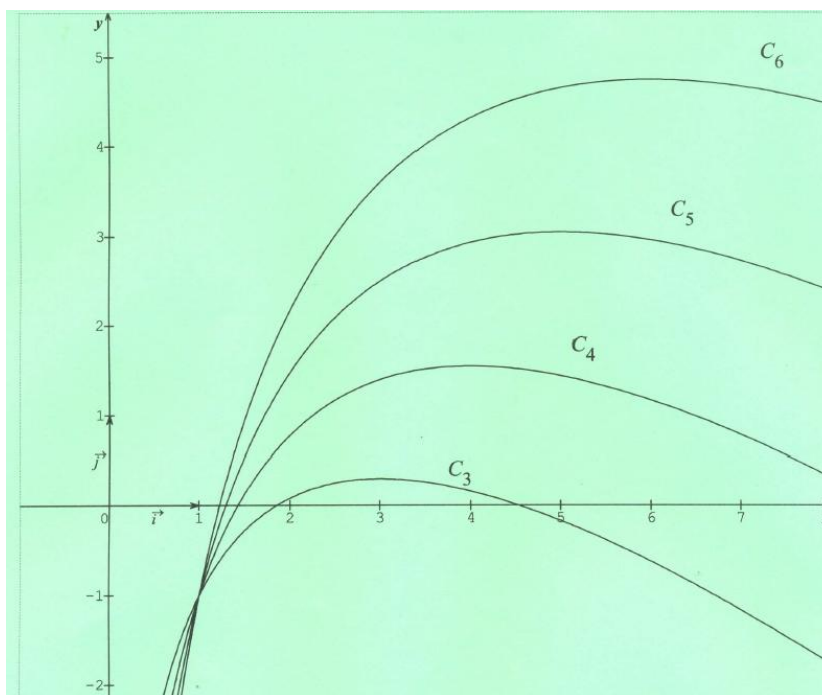
x	0	p	$+\infty$
$f'_p(x)$		+	0
$f_p$		$p(\ln p) - p$	-
	$-\infty$		$-\infty$

- a) Montrer que , pour tout entier naturel  $p \geq 3$ , il existe un unique réel  $u_p$  appartenant à l'intervalle  $]1, p[$  tel que  $f_p(u_p) = 0$ .
- b) Montrer que, pour tout entier naturel  $p \geq 3$ , il existe un unique réel  $v_p > p$  tel que  $f_p(v_p) = 0$ .

On définit ainsi, pour tout entier naturel  $p \geq 3$ , deux suites  $(u_p)$  et  $(v_p)$ .

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites  $(u_p)$  et  $(v_p)$  définies précédemment.

- 1) Déterminer la limite de la suite  $(v_p)$ .
- 2) On a représenté dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe les courbes  $C_3, C_4, C_5$  et  $C_6$  représentatives des fonctions  $f_3, f_4, f_5$  et  $f_6$ .
  - a) Placer sur l'axe des abscisses les termes  $u_3, u_4, u_5$  et  $u_6$  de la suite  $(u_p)$ .
  - b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels  $f_3(u_4), f_4(u_5)$  et  $f_5(u_6)$ .
- 3) a) Montrer que pour tout entier naturel  $p \geq 3, f_p(u_{p+1}) < 0$ .
  - b) En déduire que la suite  $(u_p)$  est décroissante et qu'elle est convergente.
- c) Montrer que  $\frac{\ln u_p}{u_p} = \frac{1}{p}$ . En déduire la limite de la suite  $(u_p)$ .



## Contenu

- Fonction  $\ln$
- Notion de bijection.
- Suites réelles, calcul de limites.

## Aptitudes visées

- Etudier les variations d'une fonction.
- Utiliser les théorèmes des valeurs intermédiaires ou de bijection pour montrer l'existence, l'unicité et encadrer des solutions des équations de type  $f(x) = 0$ .
- Représenter graphiquement les termes d'une suite récurrente.
- Prouver la convergence d'une suite réelle et déterminer sa limite.

## Solutions et commentaires

A.

- 1)  $f_3$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $f_3'(x) = \frac{3}{x} - 1 = \frac{3-x}{x}$ .

x	0	3	$+\infty$
$f_3'(x)$		+	○ -
$f_3$		$3\ln 3 - 3$	$-\infty$

- 2) La fonction  $f_3$  est continue et strictement croissante sur  $]1, 3[$  donc elle réalise une bijection de  $]1, 3[$  sur  $f_3(]1, 3[) = ]-1, 3\ln 3 - 3[$ .  $0 \in ]-1, 3\ln 3 - 3[$  donc il existe un unique  $u_3 \in ]1, 3[$  tel que  $f_3(u_3) = 0$ .

La fonction  $f_3$  est continue et strictement décroissante sur  $]3, +\infty[$  donc elle réalise une bijection de  $]3, +\infty[$  sur  $f_3(]3, +\infty[) = ]-\infty, 3\ln 3 - 3[$ .  $0 \in ]-\infty, 3\ln 3 - 3[$  donc il existe un unique  $v_3 \in ]3, +\infty[$  tel que  $f_3(v_3) = 0$ .

✓ Se rappeler le théorème de bijection

- 3) Remarquons que pour tout  $p > 3$ ,  $p \ln p - p = p(\ln p - 1) > 0$ .

a) La fonction  $f_p$  est continue et strictement croissante sur  $]1, p[$  donc elle réalise une bijection de  $]1, p[$  sur  $f_p(]1, p[) = ]-1, p \ln p - p[$ .  $0 \in ]-1, p \ln p - p[$  donc il existe un unique  $u_p \in ]1, p[$  tel que  $f_p(u_p) = 0$

b) La fonction  $f_p$  est continue et strictement décroissante sur  $]p, +\infty[$  donc elle réalise une bijection de  $]p, +\infty[$  sur  $f_p(]p, +\infty[) = ]-\infty, p \ln p - p[$ .  $0 \in ]-\infty, p \ln p - p[$  donc il existe un unique  $v_p \in ]p, +\infty[$  tel que  $f_p(v_p) = 0$ .

B.

1) On sait que pour tout  $p > 3$ ,  $v_p > p$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} p = +\infty$  donc  $\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = +\infty$ .

2) a) et b) voir la figure.

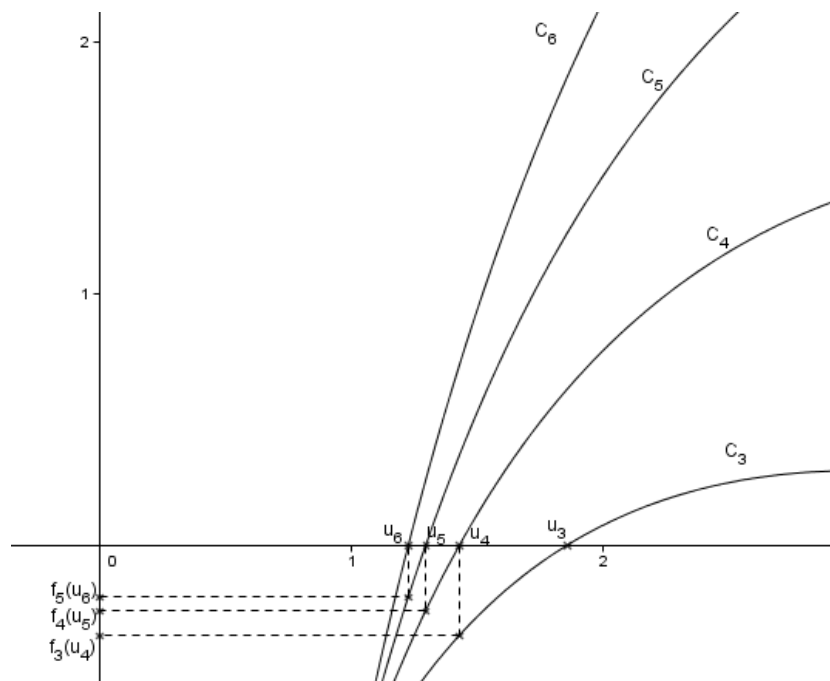
3) a) Pour tout  $p \geq 3$ ,  $f_p(u_{p+1}) = p \ln(u_{p+1}) - u_{p+1} = (p+1) \ln(u_{p+1}) - u_{p+1} - \ln(u_{p+1})$   
 $= f_{p+1}(u_{p+1}) - \ln(u_{p+1}) = -\ln(u_{p+1}) < 0$  car  $u_{p+1} > 1$ .

b) on a pour tout  $p \geq 3$ ,  $f_p(u_{p+1}) < 0 = f_p(u_p)$  et la fonction  $f_p$  est strictement croissante sur  $]1, p[$  donc  $u_{p+1} < u_p$  par suite la suite  $(u_p)$  est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

c)  $f_p(u_p) = 0 \Rightarrow p \ln(u_p) - u_p = 0 \Rightarrow \frac{\ln(u_p)}{u_p} = \frac{1}{p}$

Posons  $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = L$  ;  $L \geq 1$ .

$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_p)}{u_p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} = 0$ , Si  $L > 1$  alors  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_p)}{u_p} = \frac{\ln L}{L} \neq 0$  d'où  $L = 1$ .



### EXERCICE 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1,3,2)$ ,  $B(1,-1,-2)$  et  $C(2,4,1)$ .

- 1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.  
b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est  $2x - y + z - 1 = 0$ .
- 2) Soit S la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$ .
  - a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.
  - b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle ( $\Gamma$ ) de diamètre  $[AB]$ .
  - c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle ( $\Gamma$ ).
- 3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.
  - a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.
  - b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle ( $\Gamma'$ ).
  - c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle ( $\Gamma'$ ) en un point E que l'on précisera.

#### Contenu

- *Plan passant par trois points non alignés de l'espace.*
- *Sphère : équation d'une sphère , détermination du centre et du rayon d'une sphère, position d'une sphère et d'un plan*
- *Homothétie de l'espace, image d'une sphère , image d'un plan par une homothétie.*

#### Aptitudes visées

- *Déterminer une équation cartésienne d'un plan.*
- *Déterminer le centre et le rayon d'une sphère connaissant son équation cartésienne.*
- *Déterminer la position d'une sphère et d'un plan.*
- *Reconnaître l'image d'une sphère par une homothétie.*
- *Reconnaître un plan globalement invariant par une homothétie .*

#### Solutions et commentaires

- 1) a)  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$  donc les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

Le vecteur  $\vec{n}$  de composantes  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est colinéaire à  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ , don  $\vec{n}$  est normal au plan (ABC) et par suite

une équation du plan (ABC) est  $2x - y + z + d = 0$

le point  $A \in (ABC)$  donc  $d = -1$ . On en déduit que (ABC) :  $2x - y + z - 1 = 0$ .

✓ On peut traiter autrement cette question : il suffit de vérifier que les points A, B et C appartiennent au plan P :  $2x - y + z - 1 = 0$ .

2) a)  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 14$ . On en déduit que S est la sphère de centre  $I(3, 0, 1)$  et de rayon  $r = \sqrt{14}$ .

b)  $d(I, (ABC)) = \sqrt{6} < r$  donc S coupe (ABC) suivant un cercle ( $\Gamma$ ) de rayon  $r' = \sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$ .

Or  $A \in S$ ,  $B \in S$  et  $AB = 4\sqrt{2} = 2r'$  ce qui prouve que [AB] est un diamètre de ( $\Gamma$ ).

c)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$  donc  $\overline{AB} \perp \overline{AC}$  par suite la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) en A. D'où (AC) est tangente à ( $\Gamma$ ) en A.

3) a) on pose  $R'$  le rayon de  $S'$  donc  $R' = 3r = 3\sqrt{14}$  et  $J = h(I) \Leftrightarrow \overline{CJ} = 3\overline{CI}$ . En posant  $J(x, y, z)$ , l'égalité

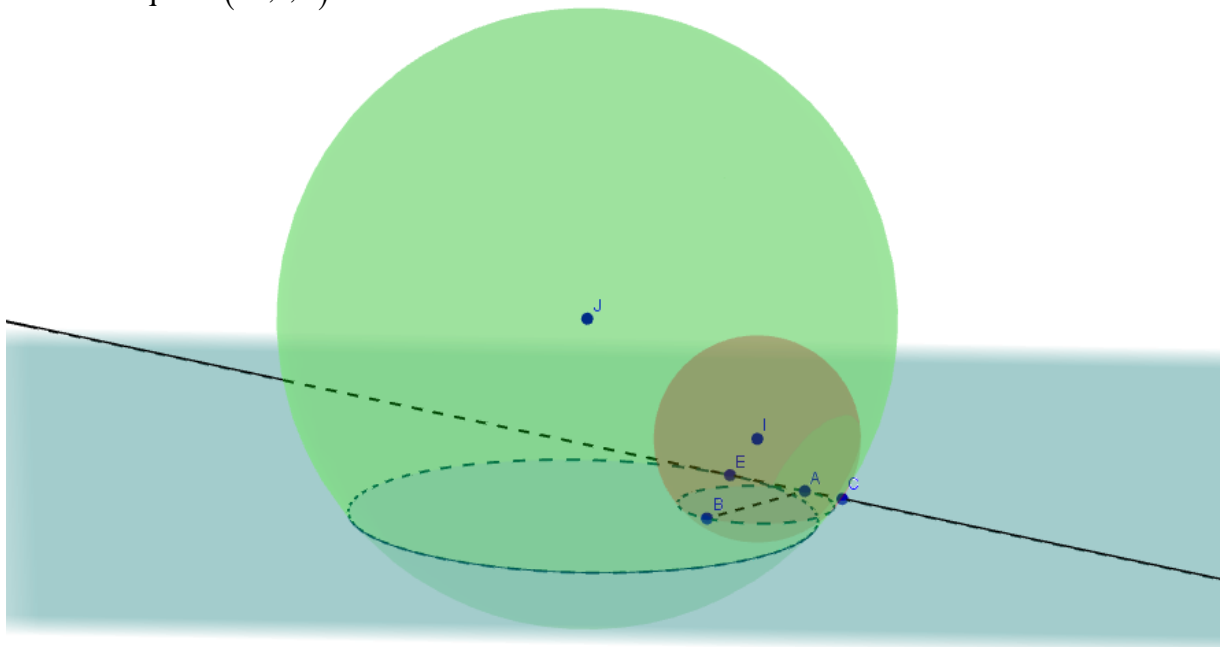
vectorielle précédente donne 
$$\begin{cases} x - 2 = 3 \\ y - 4 = -12 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$
 il résulte que  $J(5, -8, 1)$ .

b) On sait que  $h(S) = S'$ . Or  $C \in (ABC)$  donc  $h((ABC)) = (ABC)$  et puisque S coupe (ABC) suivant le cercle ( $\Gamma$ ) donc  $S' = h(S)$  coupe (ABC) =  $h((ABC))$  suivant le cercle  $\Gamma' = h(\Gamma)$ .

c)  $C \in (AC)$  donc  $h((AC)) = (AC)$  et puisque (AC) est tangente à S en A donc (AC) =  $h((AC))$  est tangente à  $S'$  en  $h(A) = E$

$h(A) = E \Leftrightarrow \overline{CE} = 3\overline{CA}$ . En posant  $E(x, y, z)$ , l'égalité vectorielle précédente donne 
$$\begin{cases} x - 2 = -1 \\ y - 4 = -1 \\ z - 1 = 1 \end{cases}$$

Il en résulte que  $E(-1, 1, 4)$ .



#### EXERCICE 4

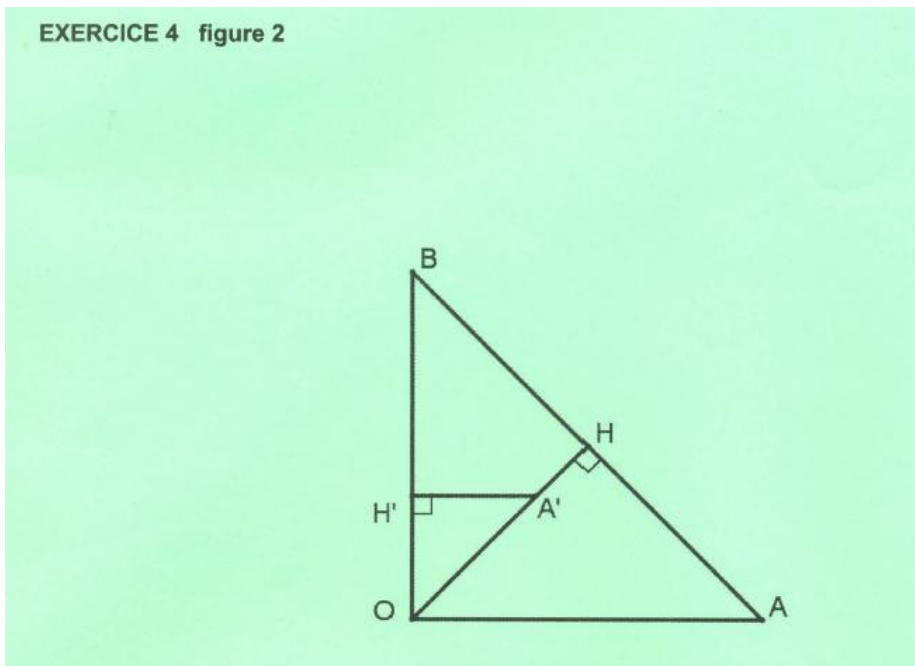
Le plan est orienté.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que  $OA' = \frac{1}{2}OA$  et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

- 1) Déterminer le rapport et l'angle de f.
- 2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f.
  - a) Déterminer la nature du triangle OA'B'.
  - b) Construire le point B'.
  - c) Montrer que  $f(H) = H'$ .
- 3) Soit I le milieu du segment [A'B] et J le milieu du segment [AA'].
  - a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.
  - b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.
  - c) Soit K le milieu du segment [AB']. Montrer que  $JK = OH'$  et que  $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OH'}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .
  - d) Déterminer alors R(K).
  - e) En déduire que  $IK = HH'$  et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.
- 4) Montrer que le quadrilatère IHK H' est un carré



## Contenu

- *Similitude directe : détermination du centre , du rapport et de l'angle d'une similitude directe, image d'un triangle par une similitude directe.*
- *Déplacement : éléments caractéristique d'une rotation.*
- *Identification d'une configuration de base ( carré).*

## Aptitudes visées

- *Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe.*
- *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'un déplacement.*
- *Utiliser une similitude ou une isométrie pour déterminer la nature d'une configuration usuelle ( triangle rectangle , carré).*

## Solutions et commentaires

1)  $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{\frac{1}{2}OA}{OA} = \frac{1}{2}$  et  $\theta \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ .

- 2) a) Le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct or  $f(O) = O$ ,  $f(A) = A'$  et  $f(B) = B'$  donc le triangle OA'B' est rectangle isocèle en O et de sens direct (f est une similitude directe).
- b) Le triangle OA'B' est rectangle isocèle en O et de sens direct donc B' est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

- c) Montrons que H' est le milieu de [A'B']. on sait que

$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$  et  $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$  donc  $(\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$  donc (OB) est la bissectrice de [OA', OB'] et puisque le triangle OA'B' est rectangle isocèle en O donc (OB) est la médiatrice de [A'B'] par suite (OB)  $\perp$  (A'B') et (OB)  $\perp$  (A'H') donc les points A', H' et B' sont alignés et H'  $\in$  (OB) d'où le point H' est le milieu de [A'B'].

Puisque H est le milieu de [AB] et  $f(A) = A'$  et  $f(B) = B'$  donc  $f(H) = H'$ .

- 3) a) I est le milieu de [A'B] et J est le milieu de [AA'] donc  $IJ = \frac{1}{2}AB = AH = OH \neq 0$  donc il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

b)  $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HO}) \equiv (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HO})[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$  donc R est une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

- c) K est le milieu de [AB'] et J est le milieu de [A'A] donc  $KJ = \frac{1}{2}A'B' = A'H' = OH'$  de plus

$$\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} \text{ donc } (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OH'}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{OH'})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{A'H'}, \overrightarrow{OH'})[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi].$$



d) On pose  $R(K) = K'$  on obtient alors  $JK = OK'$  et  $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OK'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$  or  $JK = OH'$  et

$$(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OH'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ on en d\u00e9duit que } OK' = OH' \text{ et } (\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{OK'}) \equiv (\overrightarrow{OH'}, \overrightarrow{JK}) + (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OK'})[2\pi] = 0[2\pi]$$

donc  $K' = H'$ . ainsi  $R(K) = H'$ .

e)  $R(K) = H'$  et  $R(I) = H$  donc  $IK = HH'$  et  $(IK) \perp (HH')$

4) I est le milieu de  $[A'B]$  et H est le milieu de  $[AB]$  donc  $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'A}$

$H'$  est le milieu de  $[A'B']$  et K est le milieu de  $[AB']$  donc  $\overrightarrow{H'K} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'A}$

Donc  $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{H'K}$  par suite  $IHKH'$  est un parall\u00e9logramme (les points I, H et K ne sont pas align\u00e9s) et puisque  $IK = HH'$  et  $(IK) \perp (HH')$  donc c'est un carr\u00e9.

