

Examen du baccalauréat (Juin 2011)	Epreuve : MATHÉMATIQUE
Section : Sciences Techniques	Session principale

**Exercice 1**

1)	2)	3)i)	3)ii)
c)	a)	b)	c)

**Exercice 2**

1) Soit la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a)  $u_1 = \frac{4 \times 1}{1+1} = 2$  et  $u_2 = \frac{4 \times 2}{1+2} = \frac{8}{3}$

b) Montrons par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 3$ .

- Pour  $n=0$ ;  $u_0=1$  et  $0 < u_0 < 3$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $0 < u_n < 3$ , démontrons que  $0 < u_{n+1} < 3$ .

On a  $u_n > 0$  donc  $\frac{4u_n}{1+u_n} > 0$  et par suite  $u_{n+1} > 0$ .

D'autre part 
$$u_{n+1} - 3 = \frac{4u_n}{1+u_n} - 3 = \frac{4u_n - 3(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{u_n - 3}{1+u_n}.$$

Comme  $0 < u_n < 3$  alors  $\frac{u_n - 3}{1+u_n} < 0$  et par suite  $u_{n+1} < 3$ .

D'où  $0 < u_{n+1} < 3$ .

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 3$ .

2) Soit la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ .

a) Montrons que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} \\
&= \frac{4u_n - 3}{1 + u_n} = \frac{4u_n - 3(1 + u_n)}{1 + u_n} \\
&= \frac{4u_n - 3 - 3 - 3u_n}{1 + u_n} = \frac{u_n - 3}{1 + u_n} \\
&= \frac{u_n - 3}{4u_n} = \frac{1}{4} v_n
\end{aligned}$$

D'où  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .

$$b) v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = -2 \quad \text{et} \quad v_n = v_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n} = 1 - \frac{3}{u_n} \quad \text{d'où} \quad \frac{3}{u_n} = 1 - v_n \quad \text{et par suite} \quad \frac{u_n}{3} = \frac{1}{1 - v_n} \quad \text{ainsi} \quad u_n = \frac{3}{1 - v_n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad \text{car} \quad 0 < \frac{1}{4} < 1. \quad \text{Donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

$$3) \quad w_n = \frac{3}{u_n}$$

$$a) 1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 3}{u_n} = \frac{u_n - u_n + 3}{u_n} = \frac{3}{u_n} = w_n$$

$$b) S_n = \sum_{k=0}^{k=n} w_k = \sum_{k=0}^{k=n} (1 - v_k) = n + 1 - \sum_{k=0}^{k=n} v_k$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} v_k = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = -2 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{-8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \quad \text{ce qui donne}$$

$$S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{3n} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = 1.$$

### Exercice 3 (5 points)

$$1) i e^{\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi+\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$2) \text{ Soit l'équation} \quad (E) : z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0.$$

$$\Delta' = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2 - 1 \times (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}} + i e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$z' = e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z'' = e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $e^{i\frac{\pi}{12}}$  et  $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$ .

a)  $\text{aff}(A) = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $\text{aff}(B) = e^{i\frac{\pi}{12}}$ . On a  $\text{aff}(C) = \text{aff}(A) + \text{aff}(B)$ , donc  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$  et par suite  $OACB$  est un parallélogramme. On a de plus  $OA = OB$  donc  $OACB$  est un losange.

b)

c) L'aire du losange  $OACB = \frac{AB \times OC}{2}$ .

$$AB = \left| e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = |z'| \quad \text{et} \quad OC = \left| e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = |z''| \quad \text{où } z' \text{ et } z'' \text{ sont les solutions de l'équation (E)}$$

et on remarque que  $z'z'' = p = \frac{c}{a}$

$$\text{Donc l'aire de } OACB = \frac{|z'z''|}{2} = \frac{|(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}|}{2} = \frac{|(1-i)| |e^{i\frac{\pi}{6}}|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

#### Exercice 4

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

1) a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + xe^{-x}) = 0.$$

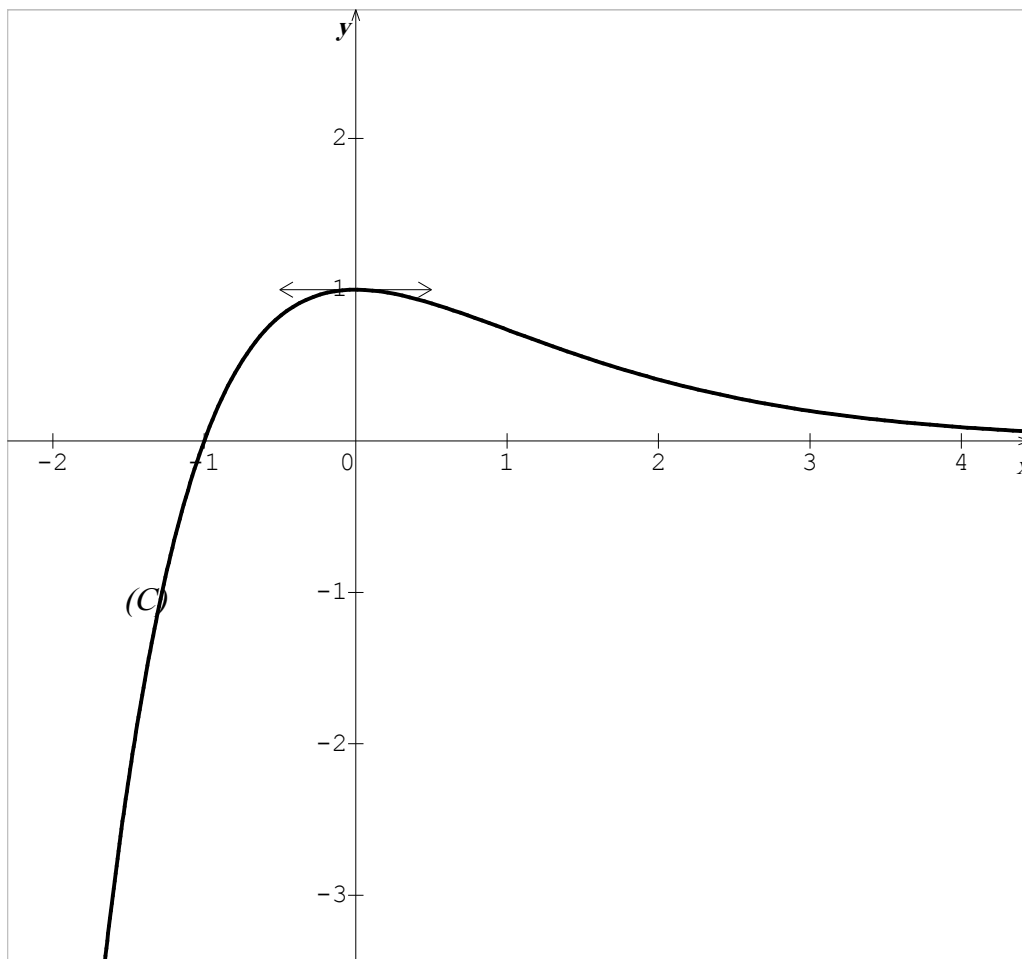
b)  $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (1+x)(-e^{-x}) = e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x} = -xe^{-x}$ .

c) Tableau de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$0$

2) a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)}{x} e^{-x} = 1 \times 0 = 0$  donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  $-\infty$ .

b) La courbe (C).



3) .

$$a) A_n = \int_0^n f(x) dx = \int_0^n (1+x)e^{-x} dx$$

Intégration par parties :

$$u(x) = 1+x \quad ; u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x} \quad ; v(x) = -e^{-x}$$

$$A_n = \int_0^n (1+x)e^{-x} dx = \left[ -(1+x)e^{-x} \right]_0^n + \int_0^n e^{-x} dx = -(1+n)e^{-n} + 1$$

$$b) \text{ On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+n)e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-n} + ne^{-n}) = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -(1+n)e^{-n} + 1 = 1.$$