

Mathématiques
Sciences de l'informatique
Corrigé de la session principale Juin 2013

Exercice 1

1) $z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i = 0.$

$$\Delta' = [(2 - i)]^2 - (7 - 4i) = (4 - 4i - 1) - (7 - 4i) = -4 = (2i)^2.$$

$$z_1 = 2 - i - 2i = 2 - 3i \quad ; \quad z_2 = 2 - i + 2i = 2 + i.$$

2) $P(z) = z^3 - (2 - 3i)z^2 - (3 + 4i)z + 18 - i \quad ; \quad z \in \mathbb{C}.$

$$\begin{aligned} \text{a) } & (z + 2 + i)(z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i) \\ &= z^3 - 2(2 - i)z^2 + (7 - 4i)z + (2 + i)(z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i) \\ &= z^3 + [-2(2 - i) + (2 + i)]z^2 + [(7 - 4i) - 2(2 + i)(2 - i)]z + (2 + i)(7 - 4i) \\ &= z^3 + [-2(2 - i) + (2 + i)]z^2 + [(7 - 4i) - 2(2 + i)(2 - i)]z + (2 + i)(7 - 4i) \\ &= z^3 - (2 - 3i)z^2 - (3 + 4i)z + 18 - i = P(z). \end{aligned}$$

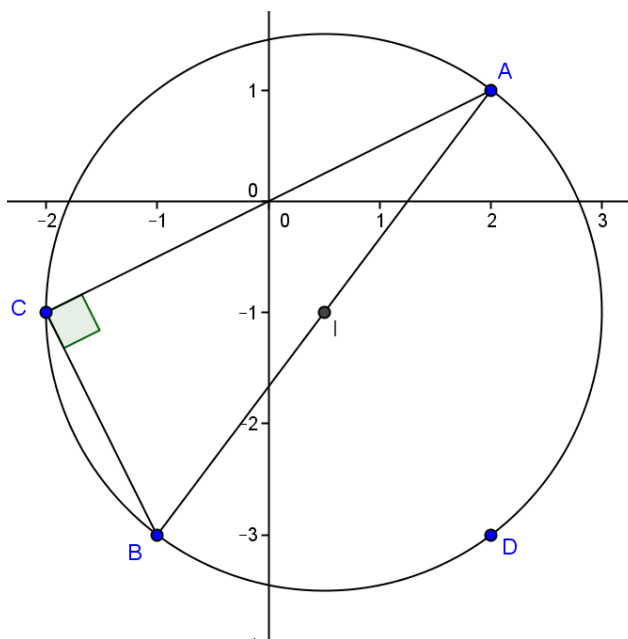
D'où $P(z) = (z + 2 + i)(z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i)$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(z) = 0 & \Leftrightarrow (z + 2 + i)[z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i] = 0 \\ & \Leftrightarrow z + 2 + i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i = 0 \\ & \Leftrightarrow z = -2 - i \quad \text{ou} \quad z = 2 - 3i \quad \text{ou} \quad z = 2 + i. \end{aligned}$$

$$S_0 = \{-2 - i, 2 - 3i, 2 + i\}$$

3) A, B, C et D les points d'affixes respectives $2 + i$, $-1 - 3i$, $-2 - i$ et $2 - 3i$.

a)



b) On a : $\overline{AC}(-4-2i)$, $\overline{BC}(-1+2i)$, $\overline{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overline{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = (-4) \times (-1) + (-2) \times 2 = 0$. D'où les vecteurs \overline{AC} et \overline{BC} sont orthogonaux et par conséquent le triangle ABC est rectangle en C.

c) Le triangle ABC est rectangle en C, d'où il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB].

$\overline{AD}(-4i)$, $\overline{BD}(3)$, $\overline{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overline{BD}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overline{AD} \cdot \overline{BD} = 0$. D'où les vecteurs \overline{AD} et \overline{BD}

sont orthogonaux et par conséquent le triangle ABD est rectangle en D. Ainsi D appartient au cercle de diamètre [AB].

Soit I le milieu du segment [AB], $I(\frac{1}{2} - i)$. $AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre $I(\frac{1}{2}, -1)$ et de rayon 5.

Exercice 2

Dans un lycée, on a les données suivantes :

- 52% des élèves sont des filles.
- 20% des élèves suivent la spécialité informatique.
- 12% des élèves sont des filles qui suivent la spécialité informatique.

On choisit au hasard un élève de ce lycée.

On considère les évènements suivants :

F : « L'élève choisi est une fille ».

I : « L'élève choisi suit la spécialité informatique ».

1)a) Dans ce lycée, 52% des élèves sont des filles alors la probabilité que l'élève choisi soit

une fille est $p(F) = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$.

20% des élèves de ce lycée suivent la spécialité informatique alors la probabilité que

l'élève choisi suit la spécialité informatique est $p(I) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

12% des élèves sont des filles qui suivent la spécialité informatique alors la probabilité que

l'élève choisi soit une fille qui suit la spécialité informatique est $p(F \cap I) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$.

b) L'élève choisi est une fille. La probabilité qu'elle suit la spécialité informatique est

$$p(I/F) = \frac{p(F \cap I)}{p(F)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{13}{25}} = \frac{3}{13}.$$

2)a) On sait que $p(I/\bar{F}) = \frac{p(I \cap \bar{F})}{p(\bar{F})}$.

$$p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}.$$

D'autre part on a $p(I) = p(I \cap F) + p(I \cap \bar{F})$, d'où $p(I \cap \bar{F}) = p(I) - p(I \cap F)$.

$$p(I \cap \bar{F}) = p(I) - p(I \cap F) = \frac{1}{5} - \frac{3}{25} = \frac{2}{25}.$$

$$p(I/\bar{F}) = \frac{p(I \cap \bar{F})}{p(\bar{F})} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

b) La probabilité que l'élève choisi soit un garçon qui ne suit pas la spécialité informatique est $p(\bar{I} \cap \bar{F})$.

$$p(\bar{I} \cap \bar{F}) = p(\bar{F}) \cdot p(\bar{I}/\bar{F}) \quad \text{or} \quad p(\bar{I}/\bar{F}) = 1 - p(I/\bar{F}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\text{D'où} \quad p(\bar{I} \cap \bar{F}) = p(\bar{F}) \cdot p(\bar{I}/\bar{F}) = \frac{12}{25} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{5}.$$

Exercice 3

1)a) Les courbes (C) et (Γ), représentées sont celles des deux fonctions $\ln : x \mapsto \ln x$ et

$$u : x \mapsto \frac{1}{x} - 1, \text{ définies sur }]0 ; +\infty[.$$

On a $\ln 2 > 0$ et $u(2) = -\frac{1}{2} < 0$. D'où la courbe (C) est celle de la fonction \ln et la courbe

(Γ) est celle de la fonction u .

b) Par une lecture graphique, on détermine la position relative des deux courbes (C) et (Γ) et cela permet d'établir le signe de $\ln x - u(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln x - u(x)$	-	0	+

2) f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (x-1) \ln x$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) \ln x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \ln x = +\infty.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1) \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x = +\infty.$$

D'où la courbe C_f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O ; \vec{j})$.

c) $f(x) = (x-1) \ln x$; $x \in]0 ; +\infty[$.

$$f'(x) = \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} ; x \in]0 ; +\infty[$$

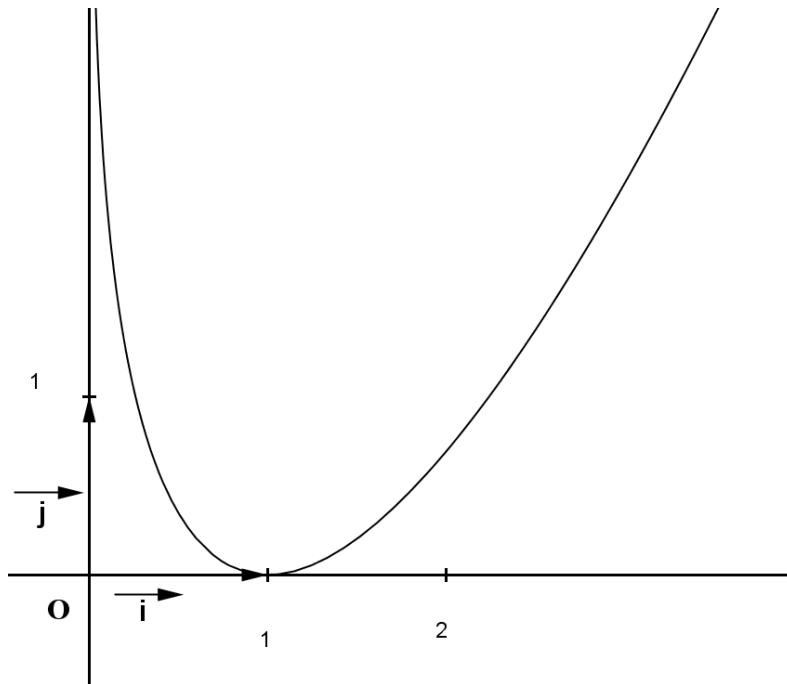
$$= \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

$$= \ln x - u(x)$$

d) Le tableau de variation de la fonction f :

x	0	1	$+\infty$		
f'(x)		-	0	+	
f	$+\infty$		0		$+\infty$

3) La courbe C_f .



$$4) \mathbf{A} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx$$

$$\text{On pose : } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x-1 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

En appliquant la formule d'intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} \int_1^e (x-1) \ln x dx &= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{1}{4}x^2 - x \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \left(\frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} + 1 \right) \\ &= \frac{e^2 - 3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \mathbf{A} = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ unité d'aire.}$$

Exercice 4

1) On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $2x - 3y = 1$.

a) Soit $(x ; y)$ une solution de (E) alors le couple $(x ; y)$ vérifie $2x - 3y = 1$, d'où d'après le théorème de Bézout x et y sont premiers entre eux.

b) $2 \times (-1) - 3 \times (-1) = 1$, d'où $(-1 ; -1)$ est une solution de (E).

$$\begin{aligned} \text{c) } (x ; y) \text{ est une solution de l'équation (E)} &\Leftrightarrow 2x - 3y = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x - 3y = 2 \times (-1) - 3 \times (-1) \\ &\Leftrightarrow 2(x+1) - 3(y+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x+1) = 3(y+1) \end{aligned}$$

On a 2 divise $3(y+1)$ et 2 et 3 sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss 2 divise $y+1$. D'où $y+1 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$y+1 = 2k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}.$$

On remplace y par sa valeur dans l'équation (E) et on tire x en fonction de k :

$$\begin{aligned} 2x - 3(2k - 1) = 1 &\Leftrightarrow 2x = 3(2k - 1) + 1 \\ &\Leftrightarrow x = 3k - 1 \end{aligned}$$

On vérifie que $(3k - 1; 2k - 1)$ est solution de (E) : $2(3k - 1) - 3(2k - 1) = 1$.

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3k - 1; 2k - 1), k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) Pour tous entiers m et n , on définit la matrice $A = \begin{pmatrix} m-2 & n-1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{a) } \det(A) = 2(m-2) - 3(n-1) = 2m - 3n - 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A \text{ n'est pas inversible} &\Leftrightarrow \det(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2m - 3n = 1 \\ &\Leftrightarrow (m; n) \text{ est une solution de l'équation (E)} \\ &\Leftrightarrow (m; n) \in \{(3k - 1; 2k - 1), k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

c) On a $13 \equiv 1[3]$ d'où $13^{2013} \equiv 1[3]$, d'autre part $2011 \equiv 1[3]$ alors $2011 \times 13^{2013} \equiv 1[3]$.

$$\text{De même } 11 \equiv 2[3] \text{ d'où } 11^{2012} \equiv 2^{2012}[3] \equiv (2^2)^{1006}[3] \equiv 1^{1006}[3] \equiv 1[3].$$

$$\text{D'autre part } 2015 \equiv 2[3] \text{ alors } 2015 \times 11^{2012} \equiv 2[3].$$

$$\text{Ainsi } 2011 \times 13^{2013} \equiv 1[3] \text{ et } 2015 \times 11^{2012} \equiv 2[3]$$

d) On pose $m = 2011 \times 13^{2013} + 2$ et $n = 2015 \times 11^{2012} + 1$.

On a : $m \equiv 0[3]$ et $n \equiv 0[3]$, d'où les entiers m et n ne sont pas premiers entre eux puisqu'ils sont divisibles par 3 par conséquent le couple $(m; n)$ ne peut pas être une solution de l'équation (E) d'après 1)a).

Or $2011 \times 13^{2013} = m - 2$ et $2015 \times 11^{2012} = n - 1$.

D'où la matrice $B = \begin{pmatrix} 2011 \times 13^{2013} & 2015 \times 11^{2012} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - 2 & n - 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A$

D'après 2)b) $(m; n)$ est une solution de l'équation (E) si et seulement si A n'est pas inversible.

Cela permet de dire que :

$(m; n)$ n'est pas une solution de l'équation (E) si et seulement si B est inversible.

On a $(m; n)$ n'est pas une solution de l'équation (E) d'où la matrice B est inversible.