

**Exercice 1 (4 points)**

- 1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, 4]$  par  $f(x) = \frac{4}{5-x}$ .
- Construire dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(C)$  de la fonction  $f$ .
  - Montrer que  $f([1, 4]) = [1, 4]$ .
- 2) Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
- On considère les points  $M_0(u_0, 0)$ ,  $M_1(u_1, 0)$ ,  $M_2(u_2, 0)$  et  $M_3(u_3, 0)$ .  
Tracer la droite  $\Delta : y = x$  puis, sans calcul, placer les points  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .
  - Quelle conjecture peut-on émettre à propos de la convergence de la suite  $(u_n)$  ?
- 3) a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq u_n \leq 4$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 2 (6 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x-1)e^{2x}$  et on désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  (l'unité graphique est 1 cm).

- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$ .
  - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Interpréter graphiquement le résultat.
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
  - Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 2) a) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1.
- Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $(x > 1)$  signifie que  $(e^{2x} > e^2)$
  - Étudier la position relative de  $T$  et  $(C)$ .
- 3) a) Montrer que  $I(0, -1)$  est un point d'inflexion pour la courbe  $(C)$ .
- Déterminer une équation de la tangente  $T'$  à la courbe  $(C)$  au point  $I$ .
- 4) Construire  $T$  et  $T'$  puis  $(C)$ .
- 5) Soit  $\alpha$  un réel négatif, on désigne par  $A(\alpha)$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 1$ .
- A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $A(\alpha)$ .
  - Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$ .

### **Exercice 3 (5 points)**

Dans une classe de 25 élèves (15 filles et 10 garçons), 16 élèves (9 filles et 7 garçons) ont chacun une moyenne en mathématiques supérieure à 10.

Une épreuve consiste à choisir au hasard deux élèves de cette classe.

1) On considère l'évènement A : « Chacun des deux élèves choisis a une moyenne en mathématiques supérieure à 10 ».

a) Montrer que  $p(A) = \frac{2}{5}$ .

b) Calculer la probabilité de l'évènement B : « les deux élèves choisis sont des filles »

c) Calculer  $p(B / A)$ .

2) On associe à cette épreuve la variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre d'élèves ayant une moyenne en mathématiques supérieure à 10.

Déterminer la loi de probabilité de X.

3) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite.

Quelle est la probabilité que l'évènement A soit réalisé au moins trois fois ?

### **Exercice 4 (5 points)**

1) On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer le déterminant de A. En déduire que la matrice A est inversible.

2) Soit la matrice  $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A \times B$ . En déduire la matrice  $A^{-1}$  inverse de A.

3) Un hôtel pratique trois tarifs différents pour un séjour de 24 heures.

Le tarif x pour les enfants de moins de 12 ans.

Le tarif y pour les enfants de 12 à 18 ans.

Le tarif z pour les personnes de plus de 18 ans.

Trois familles ont passé un séjour de 24 heures dans cet hôtel.

- La famille 1, formée du père, de la mère et de trois enfants de 7, 10 et 15 ans a payé 200 dinars.
- La famille 2, formée du père, de la mère et de cinq enfants de 4, 8, 13, 15 et 19 ans a payé 290 dinars.
- La famille 3, formée de la mère et de deux enfants de 13 et 16 ans a payé 130 dinars.

a) Traduire la situation précédente par un système d'équations.

b) Déterminer les trois tarifs x, y et z.