

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
a	b	b	c

1) Le point I appartient au plan (EFB), qui est parallèle au plan (HGC), d'où la distance du point I au plan (HGC) est la longueur de l'arête du cube. C'est-à-dire la distance du point I au plan (HGC) est égale à 1.

2) S la sphère de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$.

La distance du point I au plan (EFH) est égale à $\frac{1}{2}$, rayon de la sphère, donc la sphère est tangente au plan (EFH). Par suite l'intersection de cette sphère avec le plan (EFH) est un seul point.

3) Les deux vecteurs \overrightarrow{AH} et \overrightarrow{GB} sont colinéaires et de sens contraires. D'autre part $AH = \sqrt{2}$, diagonale d'un carré de côté 1.

$$\text{D'où } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} = -AH^2 = -2.$$

4) $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE}$ est un vecteur normal au plan (EFD).

Le côté [DC] du cube est parallèle au côté [EF], donc le vecteur \overrightarrow{DC} n'est pas normal au plan (EFD). D'où $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} \neq \overrightarrow{DC}$.

On peut remarquer que le vecteur $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE}$ est orthogonal à chacun des deux vecteurs \overrightarrow{FD} et \overrightarrow{FE} . Graphiquement, on peut voir que le vecteur \overrightarrow{BF} n'est pas orthogonal au vecteur \overrightarrow{FD} . On peut confirmer cela par le calcul :

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BF} \cdot (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD}) = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{GD} = 0 + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GD} \neq 0. \text{ Donc } \overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} \neq \overrightarrow{BF}.$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AH}.$$

Remarque : Pour les questions 3) et 4), on peut considérer un repère de l'espace et vérifier par le calcul.

Exercice 2

1) Soit dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^2 - (\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 0$.

a) Vérifions que 2 est une solution de l'équation (E) :

$$2^2 - 2(\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2}) + 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = 0.$$

D'où 2 est une solution de l'équation (E).

b) Soit z_2 l'autre racine de l'équation (E).

- On peut utiliser la somme des racines :

$$2 + z_2 = \sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2} \Rightarrow z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

- On peut utiliser le produit des racines :

$$2 \cdot z_2 = 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \Rightarrow z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

2) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a) $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Voir la figure.

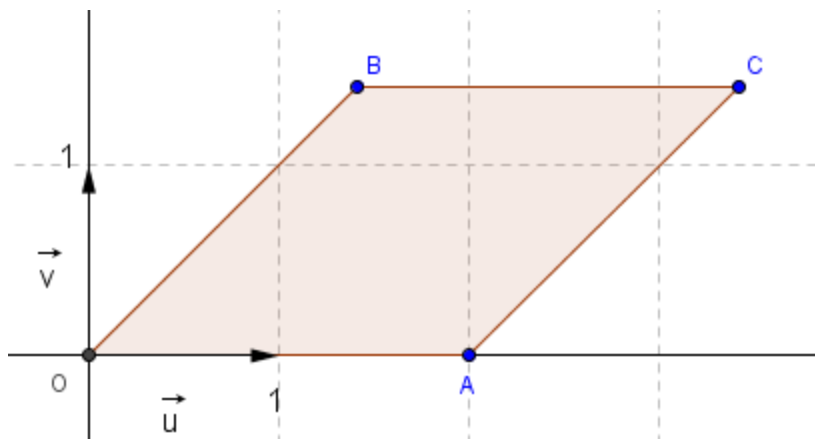
Pour placer le point B, il suffit de remarquer que $|z_B| = 2$ et $\arg(z_B) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

Donc B est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

3) Soit C le point d'affixe $z_C = 2 + z_B$.

a) Voir la figure.

On a $z_C = 2 + z_B$, d'où le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $2\vec{u}$.



b) Montrons que le quadrilatère OACB est un losange :

$$OA = |z_A| = 2; OB = |z_B| = 2; BC = |z_C - z_B| = |2 + z_B - z_B| = |2| = 2$$

$$\text{et } AC = |z_C - z_A| = |2 + z_B - 2| = |z_B| = 2.$$

On a $OA = OB = AC = BC$, d'où $OACB$ est un losange.

$$c) \left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}} \right) e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{8}} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{8} + i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8} + i\frac{\pi}{8}} = e^{i \times 0} + e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\text{D'où } 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}} \right) e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

$$d) z_C = 2 + z_B = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = 2 \left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}} \right) e^{i\frac{\pi}{8}} = 2 \left(2 \cos \frac{\pi}{8} \right) e^{i\frac{\pi}{8}} = 4 \cos \frac{\pi}{8} e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

$$e) z_C = 4 \cos \frac{\pi}{8} e^{i\frac{\pi}{8}} = 4 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\text{D'autre part } z_C = 2 + z_B = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

Par identification des deux parties réelles on obtient : $4 \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2 + \sqrt{2}$.

$$4 \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{4}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{4}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} - 1$$

$$= \frac{4 - (2 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} = 3 - \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2; \text{ d'où } \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \text{ car on sait que } \tan \frac{\pi}{8} > 0.$$

Exercice 3

I] Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x - 1$.

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
g	$+\infty$	$g(0)$	$+\infty$

$$1) g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0.$$

2) En exploitant le tableau de variation de g et en tenant compte du fait que $g(0) = 0$, on peut conclure que $g(x) \geq 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II] Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+2)e^{-x} + x - 2$.

(C) la courbe représentative f de dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1)a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{-x} + x - 2 = -\infty$; car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{-x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$.

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)e^{-x} + x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{-x} + 1 - \frac{2}{x} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, d'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(-\infty)$.

c) La droite $\Delta : y = x - 2$.

$$f(x) - (x - 2) = (x + 2)e^{-x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)e^{-x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} + 2e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + 2e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} + 2e^{-x} = 0 ; \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$, d'où la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) de f .

d) On se propose d'étudier la position de la courbe (C) et Δ .

$$f(x) - (x - 2) = (x + 2)e^{-x}.$$

Le signe de $f(x) - (x - 2)$ est celui de $x + 2$, car $e^{-x} > 0$. On a donc :

- Si $x < -2$ on a $x + 2 < 0$ et $f(x) - (x - 2) < 0$. Dans ce cas la courbe (C) est au-dessous de Δ .
- Si $x = -2$ on a $x + 2 = 0$ et $f(x) - (x - 2) = 0$. La courbe (C) coupe Δ au point d'abscisse (-2).
- Si $x > -2$ on a $x + 2 > 0$ et $f(x) - (x - 2) > 0$. Dans ce cas la courbe (C) est au-dessus de Δ .

2)a) $f(x) = (x + 2)e^{-x} + x - 2$; $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x} + 1 \\ = e^{-x} - xe^{-x} - 2e^{-x} + 1 \\ = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \\ = e^{-x}(-x - 1 + e^x) \\ = e^{-x}(e^x - x - 1) = e^{-x}g(x).$$

On a ainsi : $f'(x) = e^{-x}g(x)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) $f'(x) = e^{-x}g(x)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où le signe de f' est celui de g .

Par suite $f'(x) \geq 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x} + x - 2 = +\infty.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f			

3)a) $f'(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$; $x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x} = xe^{-x} ; x \in \mathbb{R}.$$

f'' s'annule en changeant de signe en 0, d'où le point O est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) Voir la figure.

4) Soit λ un réel strictement supérieur à (-2).

$A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \lambda$.

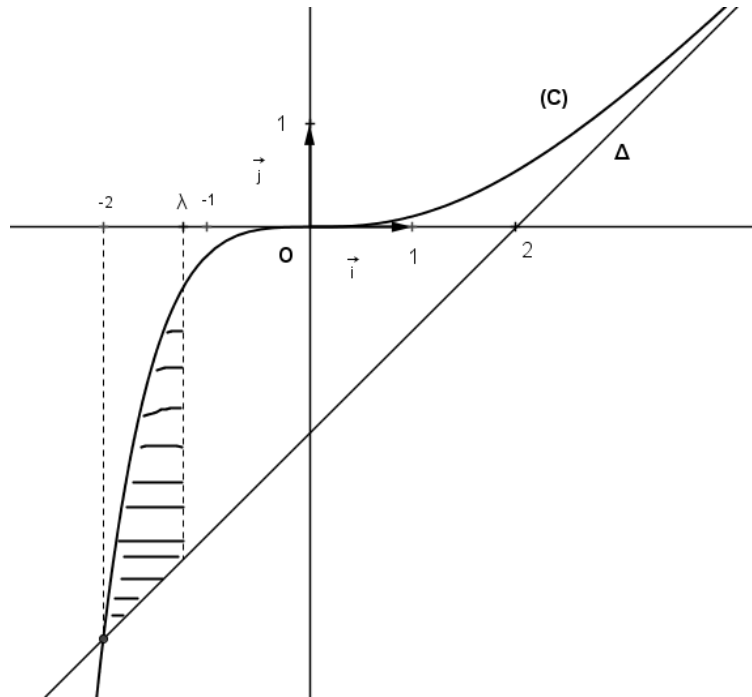
$$a) A(\lambda) = \int_{-2}^{\lambda} (f(x) - (x-2)) dx = \int_{-2}^{\lambda} (x+2)e^{-x} dx.$$

$$\text{On pose : } u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{\lambda} (x+2)e^{-x} dx = \left[-(x+2)e^{-x} \right]_{-2}^{\lambda} + \int_{-2}^{\lambda} e^{-x} dx \\ &= -(\lambda+2)e^{-\lambda} + \left[-e^{-x} \right]_{-2}^{\lambda} \\ &= -(\lambda+2)e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + e^2 = e^2 - (\lambda+3)e^{-\lambda} \text{ ua.} \end{aligned}$$

$$b) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^2 - (\lambda+3)e^{-\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^2 - \lambda e^{-\lambda} + 3e^{-\lambda} = e^2.$$



Exercice 4

Une usine de fabrication de machines effectue deux tests : électrique et mécanique.

- 81% des machines n'ont aucun défaut
- 10% des machines ont un défaut électrique
- Parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique.

E : « la machine présente un défaut électrique »

M : « la machine présente un défaut mécanique »

1)a) On a 10% des machines ont un défaut électrique, d'où $p(E) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$.

\bar{E} : « la machine ne présente pas un défaut électrique »

\bar{M} : « la machine ne présente pas un défaut mécanique »

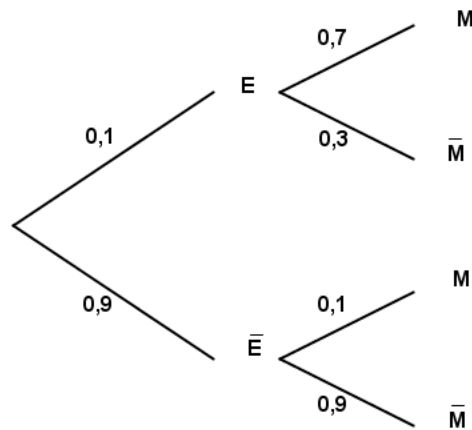
$\bar{E} \cap \bar{M}$: « la machine ne présente pas un défaut électrique et ne présente pas un défaut mécanique ». C'est-à-dire la machine ne présente aucun défaut.

81% des machines n'ont aucun défaut, d'où $p(\bar{E} \cap \bar{M}) = \frac{81}{100} = 0,81$.

b) $p(E) = 0,1 \Rightarrow p(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - 0,1 = 0,9$.

$$p(\bar{M} / \bar{E}) = \frac{p(\bar{E} \cap \bar{M})}{p(\bar{E})} = \frac{0,81}{0,9} = 0,9.$$

2)a) L'arbre pondéré associé à la situation :



b) $p(M) = p(E).p(M/E) + p(\bar{E}).p(\bar{M}/\bar{E}) = 0,1 \times 0,7 + 0,9 \times 0,1 = 0,16$.

c) Soit p la probabilité qu'une machine présente au moins un des deux défauts.

$$p = p(E \cup M) = p(E) + p(M) - p(E \cap M).$$

D'après l'énoncé, parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique. Autrement dit, parmi les machines ayant un défaut électrique 70% ont aussi un défaut mécanique. D'où $p(E \cap M) = \frac{70}{100} = 0,7$.

Par suite $p = p(E \cup M) = p(E) + p(M) - p(E \cap M) = 0,1 + 0,16 - 0,7 = 0,19$.

3) On effectue le contrôle de 20 machines.

X la variable aléatoire donnant le nombre de machines qui présentent au moins un des deux défauts.

a) Le contrôle d'une machine est une épreuve à deux issues contraires : la machine présente au moins un des deux défauts ou la machine ne présente aucun des deux défauts. Le fait de contrôler 20 machines, cela correspond à la répétition de cette épreuve 20 fois. La variable X joue le rôle d'un compteur des machines ayant au moins l'un des défauts parmi ces 20 machines. D'où X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,19 (la probabilité qu'une machine présente au moins un des deux défauts).

$$p(X = k) = C_{20}^k (0,19)^k (1 - 0,19)^{20-k} = C_{20}^k (0,19)^k (0,81)^{20-k} ; k \in \{0, 1, \dots, 20\}.$$

b) La probabilité que deux exactement des 20 machines présentent au moins un des deux défauts :

$$p(X = 2) = C_{20}^2 (0,19)^2 (0,81)^{18} = 190 \times (0,19)^2 \times (0,81)^{18} \approx 0,15.$$