

Exercice 1

1) a) $E(1,0,1)$, $I\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $J\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$.

b) $\overrightarrow{OI} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, il en résulte que $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{4}\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \frac{1}{4}(\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w})$.

2) a) $A_{OIJ} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ}\| = \frac{\sqrt{21}}{8}$.

b) $\overrightarrow{OE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_{OIJ} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ}) \cdot \overrightarrow{OE}| = \frac{1}{8}$.

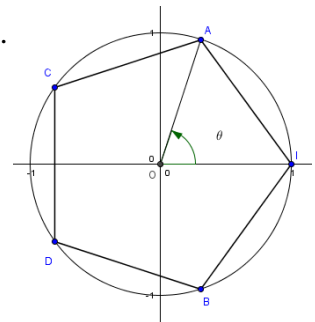
c) La distance EH est la longueur de la hauteur issue de E dans le tétraèdre OIJE.

Or $V_{OIJ} = \frac{1}{3} \times A_{OIJ} \times EH$ donc $EH = \frac{3V_{OIJ}}{A_{OIJ}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{7}$. Il en résulte que S est la sphère de centre $E(1,0,1)$

et de rayon $R = \frac{\sqrt{21}}{7}$. Or H est le projeté orthogonal de E sur (OIJ), il en résulte que

$d(E, (OIJ)) = EH = \frac{\sqrt{21}}{7} = R$, on en déduit que S est tangente à (OIJ) en H.



Exercice 2

1) a) $a = e^{i\theta}$, $\bar{a} = e^{-i\theta}$, $a^2 = e^{2i\theta}$ et $\bar{a}^2 = e^{-2i\theta}$.

b) Voir figure.

2) a) $a + \bar{a} = 2 \operatorname{Re}(a) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) $a^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1 = a^2 - a(a + \bar{a}) + 1 = a^2 - a^2 - |a^2| + 1 = 0$ ce qui prouve que a est solution de

l'équation (E).

$\bar{a}^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\bar{a} + 1 = a^2 - \overline{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1} = 0$ ce qui prouve que \bar{a} est solution de l'équation (E).

3) a) $(z-1) \left(z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 \right) \left(z^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 \right) = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1$.

b) En changeant z par a dans a), on obtient $a^5 - 1 = (a - 1) \left(a^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) a + 1 \right) \left(a^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) a + 1 \right)$

et puisque a est solution de l'équation (E) donc $\left(a^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) a + 1 \right) = 0$, il en résulte que

$a^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow a^5 = 1$ ou encore a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1 sont $e^{i \frac{2k\pi}{5}}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

b) $\begin{cases} \cos \frac{2\pi}{5} > 0 \\ \sin \frac{2\pi}{5} > 0 \end{cases}$, $\text{Im}(1) = 0$, $\cos \frac{4\pi}{5} < 0$, $\cos \frac{6\pi}{5} < 0$ et $\sin \frac{8\pi}{5} < 0$. Il en résulte que $e^{i \frac{2k\pi}{5}}$ est l'unique

racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives.

c) On sait que a est une racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives, d'après b), $a = e^{i \frac{2k\pi}{5}}$.

5) Les affixes respectives des points I, A, B, C et D sont les racines cinquièmes de l'unité donc les points I, A, B, C et D sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle (C).

Exercice 3

1) a) Puisqu'il y a exactement 3 microscopes défectueux donc le premier microscope non défectueux est obtenu au plus au quatrième choix, on en déduit que $n \leq 4$.

b) $p_1 = \frac{7}{10}$ et $p_2 = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$.

c) $p_3 = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{120}$ et $p_4 = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{7} = \frac{1}{120}$.

2) a) Les valeurs prises par X sont $\{1, 2, 3, 4\}$. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

b) $E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1 \times \frac{7}{10} + 2 \times \frac{7}{30} + 3 \times \frac{7}{120} + 4 \times \frac{1}{120} = \frac{46}{120} = \frac{23}{60} = 0.38$.

3) a) $p(Y \leq T) = 1 - e^{-\lambda T}$.

b) $p(Y \geq 5) = 1 - p(Y \leq 5) = e^{-5\lambda} = 0.7 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0.7 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0.7}{5} = 0.071$.

c) $p(Y \geq 10 \mid Y \geq 5) = \frac{p((Y \geq 10) \cap (Y \geq 5))}{p(Y \geq 5)} = \frac{p(Y \geq 10)}{p(Y \geq 5)} = e^{-5 \times 0.071} = 0.701$.

Exercice 4

1) a) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, il en résulte que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

Si $x \in]0, 1[$, $x - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} < 0$, il en résulte que $x < \frac{1}{x}$.

Si $x \in]1, +\infty[$, $x - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$, il en résulte que $x > \frac{1}{x}$.

c) Si $x \in]0, 1[$, $x < \frac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si $x \in]1, +\infty[$, $x > \frac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x - 2 + \frac{2}{x} \right) e^x + e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{2}{x} \right) e^x + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = +\infty.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. La droite $x = 0$ est une asymptote de (C_f) .

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$. La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (O, \vec{j}) en $+\infty$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = x^2e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) $f'(1) = g(1) - g(1) = 0$.

c)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

4) a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x > 0$ car $x^2 - 2x + 2 > 0$, ($\Delta = -4$). Il en résulte que (C_f) est au-dessus de (C_h) .

b) Voir figure.

$$\begin{aligned} 5) \text{ a) } \int_1^x (f(t) - h(t)) dt &= \int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt = \int_1^x (t^2 + 2t)e^t dt + 2 \int_1^x e^t dt - 4 \int_1^x te^t dt \\ &= [g(t)]_1^x + 2[e^t]_1^x - 4 \int_1^x te^t dt = x^2e^x - e + 2e^x - 2e - 4 \int_1^x te^t dt = x^2e^x + 2e^x - 3e - 4 \int_1^x te^t dt \end{aligned}$$

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(x) = e^t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(x) = 1 \\ v(x) = e^t \end{cases}$

$$\int_1^x te^t dt = [te^t]_1^x - \int_1^x e^t dt = xe^x - e - [e^t]_1^x = xe^x - e^x.$$

$$\text{Donc } \int_1^x (f(t) - h(t)) dt = x^2e^x + 2e^x - 3e - 4(xe^x - e^x) = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e.$$

$$b) A_\alpha = \int_\alpha^1 (f(t) - h(t)) dt = 3e - (\alpha^2 - 4\alpha + 6)e^\alpha.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 3e - \alpha^2 e^\alpha - 4\alpha e^\alpha + 6e^\alpha = 3e.$$

