

## Section : Sport

## Épreuve : Mathématiques

## Exercice 1

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 2016 \\ u_{n+1} = \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$1) a) u_1 = \frac{1}{e}(u_0 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e}(2016 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e} + 2015$$

$$u_2 = \frac{1}{e}(u_1 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e} + 2015 - 2015\right) + 2015 = \frac{1}{e^2} + 2015$$

$$\begin{aligned} b) (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) &= \left(\left(\frac{1}{e^2} + 2015\right) - \left(\frac{1}{e} + 2015\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{e} + 2015\right) - 2016\right) \\ &= \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e} - 1\right) \\ &= \frac{1}{e^2} - 2 \times \frac{1}{e} + 1 = \left(\frac{1}{e} - 1\right)^2. \end{aligned}$$

c) On a  $(u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) \neq 0$ , c'est à dire  $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ , d'où  $(u_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

2) a) On a :  $u_{n+1} = \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015 - u_n \\ &= \frac{1}{e}u_n - u_n - \frac{1}{e} \times 2015 + 2015 \\ &= \left(\frac{1}{e} - 1\right)u_n - \left(\frac{1}{e} - 1\right) \times 2015 \\ &= \left(\frac{1}{e} - 1\right)(u_n - 2015) \end{aligned}$$

b) Montrons par récurrence que  $u_n > 2015$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- $u_0 = 2016 > 2015$  d'où l'inégalité est vérifiée pour  $n = 0$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que l'inégalité est vraie pour  $n$ . C'est-à-dire  $u_n > 2015$ .
- Montrons que l'inégalité est vraie pour  $n + 1$ .

$$\begin{aligned}
\text{On a } u_n > 2015 &\Rightarrow u_n - 2015 > 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{e}(u_n - 2015) > 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015 > 2015 \\
&\Rightarrow u_{n+1} > 2015
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité est vraie pour  $n+1$ .

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence,  $u_n > 2015$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

c) On a:  $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(u_n - 2015)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Or  $\frac{1}{e} - 1 < 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 2015$ , d'où  $u_{n+1} - u_n < 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Parsuite  $u_{n+1} < u_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi la suite  $(u_n)$  est décroissante.

3)a) Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = u_n - 2015$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2015 = \frac{1}{e}(u_n - 2015) = \frac{1}{e}v_n.$$

D'où  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{e}$  et de premier terme  $v_0$

$$v_0 = u_0 - 2015 = 2016 - 2015 = 1.$$

b)  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{e}$  et de premier terme  $V_0 = 1$ .

$$\text{On a } v_n = \left(\frac{1}{e}\right)^n v_0 = \frac{1}{e^n} \times 1 = \frac{1}{e^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c)  $v_n = u_n - 2015$ , pour tout  $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_n = v_n + 2015$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{e^n} + 2015 = e^{-n} + 2015.$$

d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} + 2015 = 2015$ , car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ .

$$4) u_n < 2015 + \frac{1}{2016} \Leftrightarrow e^{-n} + 2015 < 2015 + \frac{1}{2016}$$

$$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{1}{2016}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{2016}$$

$$\Leftrightarrow e^n > 2016$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^n) > \ln(2016)$$

$$\Leftrightarrow n > \ln(2016)$$

$\ln(2016) \approx 7,60$  d'où  $n_0 = 8$ .

## Exercice 2

Une urne contient 5 boules numérotées : 1, 1, 2, 2, 3.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Soit  $\Omega$  l'univers des cas possibles. On a  $\text{Card}(\Omega) = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ .

A : « Les deux boules tirées portent le même numéro ».

C'est-à-dire tirer les deux boules qui portent le numéro 1 ou les deux boules qui portent le numéro 2.

$$p(A) = \frac{C_2^2 + C_2^2}{10} = \frac{1+1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

B : « Parmi les boules tirées, une seule porte le numéro 1 ».

C'est-à-dire tirer une boule parmi les 2 portant le numéro 1, et une boule parmi les autres (qui portent le numéro 2 ou 3).

$$p(B) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{2 \times 3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

C : « Les deux boules tirées portent le même numéro ou une seule d'entre elles porte le numéro 1 ».

On peut remarquer que  $C = A \cup B$ . D'où  $p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B)$  puisque A et B sont deux évènements incompatibles.

$$p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules portant un numéro impair tirées.

a) Lors d'un tirage de deux boules, on peut obtenir 1 boule portant un numéro impair ou deux ou aucune. D'où  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ .

(X = 0) : « Aucune boule portant un numéro impair est tirée », cela veut dire « tirer deux boules portant le numéro 2 ».  $p(X = 0) = \frac{1}{10}$ .

(X = 1) : « Une seule boule portant un numéro impair est tirée », cela veut dire « tirer une boule portant un numéro impair et l'autre portant le numéro 2 ».  $p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{6}{10}$ .

(X = 2) : « Deux boules portant des numéros impairs sont tirées ».

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}.$$

On peut résumer la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans le tableau suivant :

$x_i$	0	1	2
$p_i$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

b) Soit p la probabilité d'avoir au moins une boule portant un numéro impair.

$$\text{On a } p = p(X \geq 1) = p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

c) L'espérance mathématique de X :  $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = 1,2$ .

### Exercice 3

$f(x) = e^{x-\ln 2}$  ;  $x \in \mathbb{R}$ . (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1)a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-\ln 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x e^{-\ln 2} = 0$ , car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x e^{-\ln 2} = +\infty$ , car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

b)  $f(x) = e^{x-\ln 2}$  ;  $x \in \mathbb{R}$ .

$f'(x) = (x-\ln 2)' e^{x-\ln 2} = e^{x-\ln 2}$  ;  $x \in \mathbb{R}$ .

c) On a  $f'(x) = e^{x-\ln 2} > 0$  ; pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f$	0	$+\infty$

d) T la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

$T : y = f'(0)x + f(0) = e^{-\ln 2} x + e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}(x + 1)$ .

$T : y = \frac{1}{2}(x + 1)$ .

2)a)  $f(\ln 2) = e^{\ln 2 - \ln 2} = e^0 = 1$ , d'où le point  $A(\ln 2, 1) \in (C)$ .

$f(2\ln 2) = e^{2\ln 2 - \ln 2} = e^{\ln 2} = 2$ , d'où le point  $B(2\ln 2, 2) \in (C)$ .

b) Soit D la droite d'équation  $y = \frac{1}{\ln 2} x$ .

Pour  $x = \ln 2$  ;  $y = \frac{1}{\ln 2} \ln 2 = 1$  ; d'où le point  $A(\ln 2, 1) \in D$ .

Pour  $x = 2\ln 2$  ;  $y = \frac{1}{\ln 2} \times 2\ln 2 = 2$  ; d'où le point  $B(2\ln 2, 2) \in D$ .

Les points A et B appartiennent à la droite D, d'où  $D = (AB)$ .

Ainsi une équation de la droite (AB) est  $y = \frac{1}{\ln 2} x$ .

c) Voir l'annexe.

3)a) On peut remarquer d'après le graphique que la droite (AB) est au-dessus de la courbe (C)

dans l'intervalle  $\ln 2, 2\ln 2$ . D'où  $\frac{1}{\ln 2} x \geq f(x)$ , pour tout  $x \in \ln 2, 2\ln 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln 2} x \geq f(x), \text{ pour tout } x \in \ln 2, 2\ln 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} x \geq e^{x-\ln 2}, \text{ pour tout } x \in \ln 2, 2\ln 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} x - e^{x-\ln 2} \geq 0, \text{ pour tout } x \in \ln 2, 2\ln 2 \end{aligned}$$

b)  $F(x) = \frac{1}{2\ln 2} x^2 - e^{x-\ln 2}$  ;  $x \in \mathbb{R}$ .

$F'(x) = \left( \frac{1}{2\ln 2} x^2 - e^{x-\ln 2} \right)' = \frac{1}{\ln 2} x - e^{x-\ln 2}$  ;  $x \in \mathbb{R}$ .

On a  $\frac{1}{\ln 2} x - e^{x-\ln 2} \geq 0$ , pour tout  $x \in \ln 2, 2\ln 2$ , d'où  $F'(x) \geq 0$ , pour tout  $x \in \ln 2, 2\ln 2$ .

Par suite F est croissante sur  $\ln 2, 2\ln 2$  .

4) Soit S l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), les droites d'équations  $x = \ln 2$ ,  $x = 2\ln 2$  et la droite (AB).

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \left( \frac{1}{\ln 2} x - e^{x-\ln 2} \right) dx = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} F'(x) dx \\
 &= F(x) \Big|_{\ln 2}^{2\ln 2} = F(2\ln 2) - F(\ln 2) \\
 &= \left( \frac{1}{2\ln 2} (2\ln 2)^2 - e^{2\ln 2 - \ln 2} \right) - \left( \frac{1}{2\ln 2} (\ln 2)^2 - e^{\ln 2 - \ln 2} \right) \\
 &= (2\ln 2) - e^{\ln 2} - \left( \frac{1}{2} \ln 2 - 1 \right) \\
 &= 2\ln 2 - 2 - \left( \frac{1}{2} \ln 2 - 1 \right) = \frac{3}{2} \ln 2 - 1 \text{ u.a}
 \end{aligned}$$

**L'annexe :**

