

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice N° 1 (4 points)

- 1) a) Calculer $(3+i)^2$.
b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$.
- 2) Soit $P(z) = z^3 - (4+3i)z^2 - (9-12i)z + 20 + 15i$.
 - a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.
 - b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = -2+i$,
 $z_C = -z_B$ et $z_D = 5$.
 - a) Placer les points A, B, C et D.
 - b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.
- 4) a) Mettre sous forme cartésienne $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$.
b) Dédire que le triangle ACD est isocèle rectangle.
c) Calculer la distance AC et déduire l'aire du parallélogramme ABCD.

Exercice N° 2 (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,2,0)$ et $I(0,1,-3)$.

- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.
b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est :
 $x + y + 2z - 1 = 0$.
- 2) Soit S la sphère de centre le point I et passant par le point A.
 - a) Montrer que S passe par le point C.
 - b) Montrer que l'intersection du plan P et de la sphère S est le cercle (C) de centre le point B et de rayon $\sqrt{5}$.
- 3) α étant un réel, on considère l'ensemble S_α des points $M(x,y,z)$ tels que :
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2\alpha z - 1 = 0$.
 - a) Montrer que S_α est la sphère de centre $I_\alpha(0,1,\alpha)$ et de rayon $R_\alpha = \sqrt{2 + \alpha^2}$.

b) Montrer que la sphère S_α passe par les points A et C.

c) En déduire que pour tout réel α , le plan P coupe la sphère S_α selon un cercle (C_α).

4) a) Soit r_α le rayon du cercle (C_α).

Montrer $r_\alpha = \sqrt{5}$ si et seulement si $\alpha = 3$ ou $\alpha = -3$.

b) Justifier que les centres des cercles (C_{-3}) et (C_3) sont respectivement le point B et un point B' dont on déterminera les coordonnées.

c) Vérifier que ABCB' est un losange.

Exercice N° 3: (4 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4}{5}(x + e^{-x})$.

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f est croissante sur \mathbb{R}_+ .

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{4}{5}$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans \mathbb{R}_+ une unique solution α et que $\alpha \in]1,2 ; 1,3[$.

4) soit la suite u définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

b) Justifier que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|u_n - \alpha|$.

c) Déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

e) Comment choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 4 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + (x-1)e^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

c) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote pour la courbe (C) au voisinage de $(-\infty)$.

d) Etudier les positions relatives de la droite Δ et la courbe (C).

2) On donne ci-après le tableau de variations de la fonction f' (fonction dérivée de la fonction f)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	1	0	$+\infty$

a) Justifier que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point I.

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .

3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α et que $\alpha \in]0,8 ; 0,9[$.

c) Tracer la droite Δ et la courbe (C).

4) Soit \mathcal{A} l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer \mathcal{A}