


REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● <b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b> <b>SESSION 2018</b>	<b><i>Session de contrôle</i></b>	
	<i>Epreuve :</i> <b>Mathématiques</b>	<i>Section :</i> <b><i>Mathématiques</i></b>
	Durée : <b>4h</b>	

*Le sujet comporte sept pages numérotées de 1/7 à 7/7.  
Les pages 5/7, 6/7 et 7/7 sont à rendre avec la copie.*

**Exercice 1 (5 points)**

Le plan est orienté. Dans la Figure 1 de l'annexe jointe,

- ABC est un triangle équilatéral direct tel que  $\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$  ;
- $\mathcal{C}_1$  est le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre ;
- I est le milieu du segment [BC] ;
- AICD est un rectangle direct.

1) Soit f le déplacement tel que  $f(A) = C$  et  $f(B) = A$ .

Montrer que f est une rotation dont on précisera son centre et une mesure de son angle.

2) Soit g l'antidépacement tel que  $g(A) = C$  et  $g(B) = A$ .

a) Justifier que g est une symétrie glissante.

b) Montrer que  $g = t_{\vec{BI}} \circ S_{\Delta}$ , où  $\Delta$  est la médiatrice du segment [AI].

3) Soit h l'homothétie de centre A et telle que  $h(O) = I$ . On pose  $\varphi = g \circ h \circ f$ .

a) Montrer que  $\varphi$  est une similitude indirecte de rapport  $\frac{3}{2}$ .

b) Montrer que  $\varphi(B) = C$  et  $\varphi(O) = D$ .

4) Soit  $E = \varphi(C)$ .

a) Montrer que le triangle DCE est isocèle en D.

b) Justifier que  $\left(\vec{DC}, \vec{DE}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .

c) Construire alors le point E.

d) Soit  $\Omega$  le centre de  $\varphi$ .

Montrer que  $\vec{\Omega B} = \frac{4}{5} \vec{BE}$ . Construire le point  $\Omega$ .

5) On pose  $\mathcal{C}_2 = \varphi(\mathcal{C}_1)$ .

Le cercle  $\mathcal{C}_2$  coupe le cercle  $\mathcal{C}_1$  au point C et en un autre point M. On pose  $N = \varphi(M)$ .

Montrer que les points  $\Omega$ , B et M sont alignés. Construire alors le point N.

### Exercice 2 (3 points)

Une urne contient six pièces de monnaie :

- quatre pièces sont équilibrées ;
- les deux autres pièces sont truquées de façon que la probabilité d'obtenir « FACE » est égale à  $\frac{2}{3}$ .

On tire, au hasard, une pièce de l'urne et on effectue  $n$  lancers successifs de cette pièce,  $n \geq 1$ .

On considère les événements suivants :

- $E$  : « la pièce tirée est équilibrée ».
- $F_n$  : « on obtient FACE pour les  $n$  lancers ».

1) a) Déterminer  $p(E)$ ,  $p(F_1/E)$  et  $p(F_1/\bar{E})$ .

b) Montrer que  $p(F_1) = \frac{5}{9}$ .

2) Montrer que  $p(F_n) = \frac{1}{3} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$ .

3) Soit  $X_n$  la variable aléatoire définie de la manière suivante :  $\begin{cases} X_n = n & \text{si } F_n \text{ est réalisé ;} \\ X_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Donner la loi de probabilité de  $X_n$ .

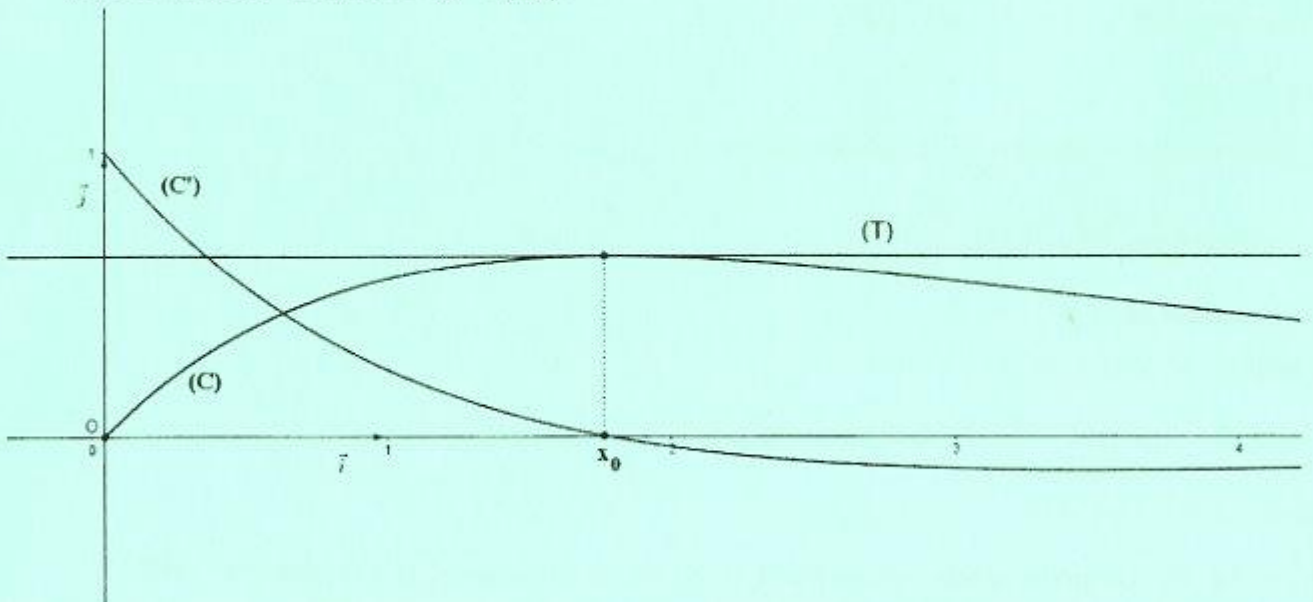
b) Déterminer l'espérance mathématique de  $X_n$ .

c) Dans la figure ci-dessous,

- $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan,
- $(C)$  est la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$

$$\text{par } f(x) = \frac{x}{3} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^x \right].$$

- $(C')$  est la courbe représentative de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ ,
- la courbe  $(C')$  coupe l'axe  $(O, \vec{i})$  en un seul point d'abscisse  $x_0$ ,
- $(T)$  est la droite d'équation  $y = f(x_0)$ .



Exploiter le graphique pour déterminer l'entier naturel  $n$  pour lequel l'espérance mathématique  $E(X_n)$  est maximale.

### Exercice 3 (7 points)

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 1 - x + x \ln x$ .

a) Etudier les variations de  $g$ .

b) En déduire que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $1 + x \ln x \geq x$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 + x \ln x} & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = +\infty$ . Interpréter graphiquement.

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement.

3) a) Montrer pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(1 + x \ln x)^2}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les courbes

$(C_1)$  et  $(C_2)$  des fonctions définies sur  $]0, +\infty[$  respectivement par  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

a) Construire le point A de  $(C_1)$  d'abscisse  $\frac{1}{e}$  et le point B de  $(C_2)$  d'abscisse  $1 - \frac{1}{e}$ .

En déduire une construction du point C de  $(C_f)$  d'abscisse  $\frac{1}{e}$ .

b) Déduire de la question 1) b) que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) \leq \frac{1}{x}$ .

Déterminer alors la position relative de  $(C_f)$  et  $(C_2)$ .

c) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

5) On considère la fonction  $F$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

a) Montrer que pour tout  $t \in [1, +\infty[$ ,  $\frac{1}{t + t \ln(t)} \leq f(t)$ .

b) Montrer alors que pour tout  $x \in [1, +\infty[$ ,  $\ln(1 + \ln x) \leq F(x) \leq \ln x$ .

c) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ .

6) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction  $h : x \mapsto x - F(x)$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $[1, +\infty[$ .

b) En déduire que l'équation  $h(x) = n$  admet dans  $[1, +\infty[$  une seule solution  $\alpha_n$ .

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$ .

d) Vérifier que  $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$ . Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$ .

#### Exercice 4 (5 points)

1) On considère, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E):  $z^2 - (1+i)z - i = 0$ .

Résoudre l'équation (E). On note  $z_1$  et  $z_2$ , les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A, B,  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives 1, i,  $z_1$  et  $z_2$ .

Soit z un nombre complexe distinct de 1, i,  $z_1$  et  $z_2$ .

On note M et M' les points d'affixes respectives z et  $z' = \frac{z+i}{z-i}$ .

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend  $z = i + 2e^{i\theta}$ , où  $\theta$  est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle  $\Gamma$  de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que  $z' = 1 + ie^{-i\theta}$ .

c) Montrer que  $AM' = 1$  et que  $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$ .

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle  $\Gamma$ .

4) Soit P le milieu du segment  $[MM']$  et  $z_P$  son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe  $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$ .

a) Vérifier que  $z_P = \frac{1+i+2e^{i\theta} + ie^{-i\theta}}{2}$ .

b) En déduire que  $z_Q = \frac{i\sqrt{2} + 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$ .

c) Montrer alors que  $z_Q = \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + i \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right)$ .

5) a) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle  $\Gamma$ , le point Q varie sur l'ellipse  $\mathcal{E}$  d'équation

$$4x^2 + \frac{4}{9} \left( y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1.$$

b) Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  le cercle  $\Gamma$ , l'ellipse  $\mathcal{E}$ ,

et on a placé un point M sur le cercle  $\Gamma$  tel que  $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \theta [2\pi]$ . Construire les points M' et Q.

Empty box for identification details.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....  
Nom et Prénom : .....  
Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants  
.....  
.....



Empty box for identification details.

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques** - Session de contrôle - 2018  
Annexe à rendre avec la copie

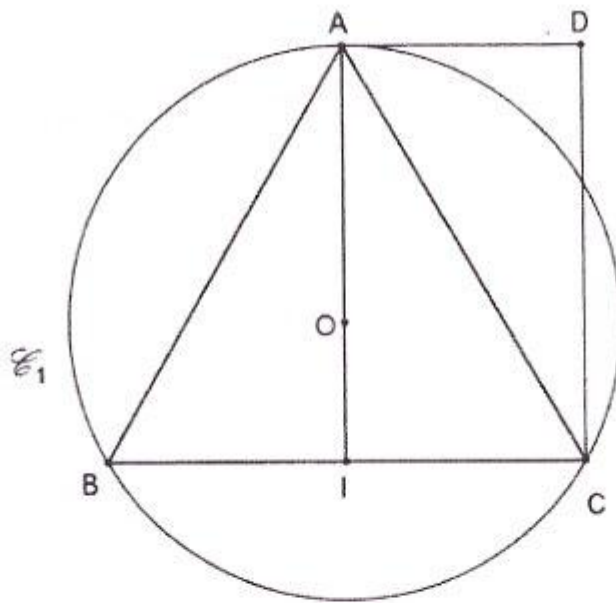


Figure 1

Ne rien écrire ici

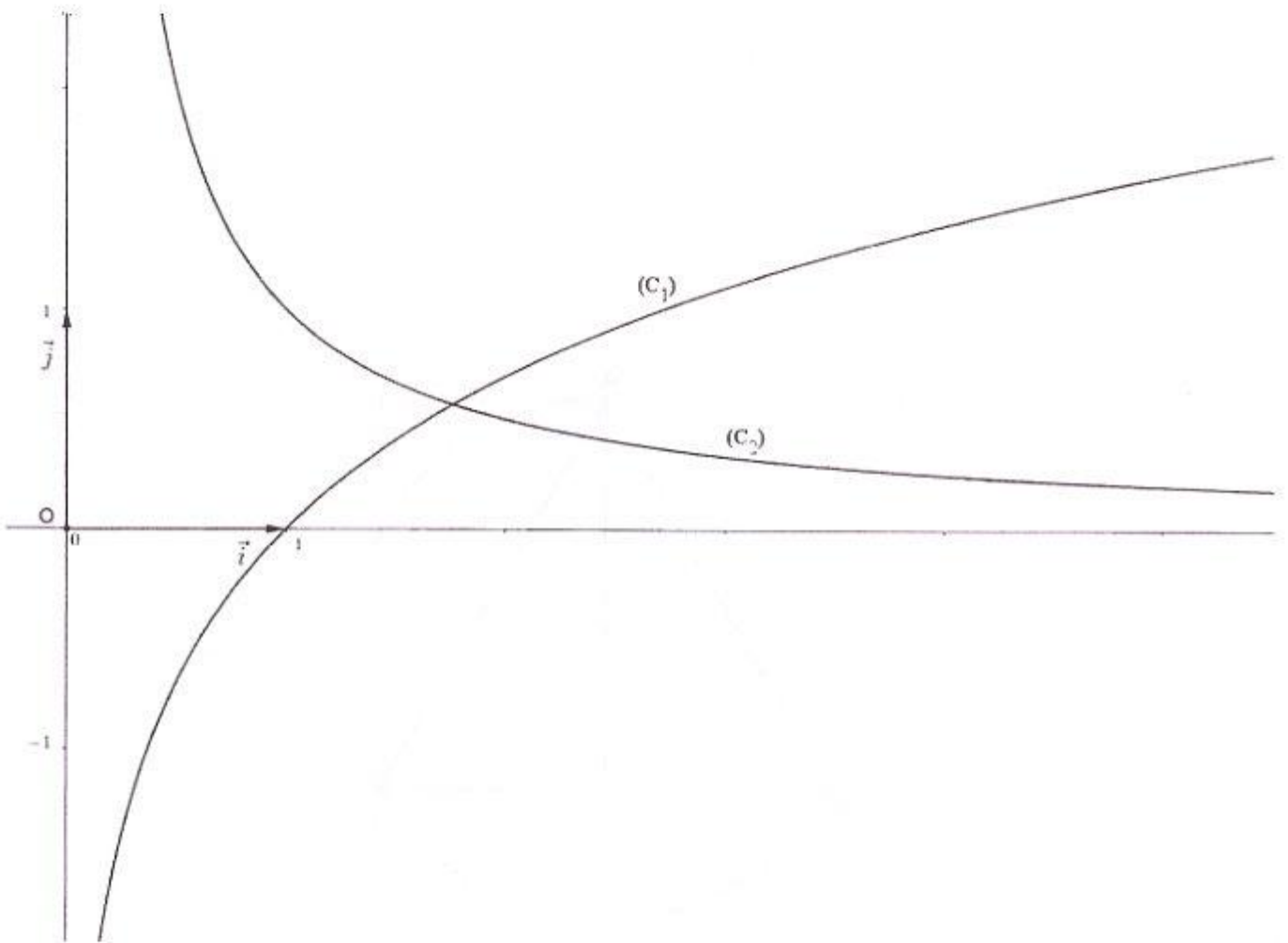


Figure 2

Ne rien écrire ici

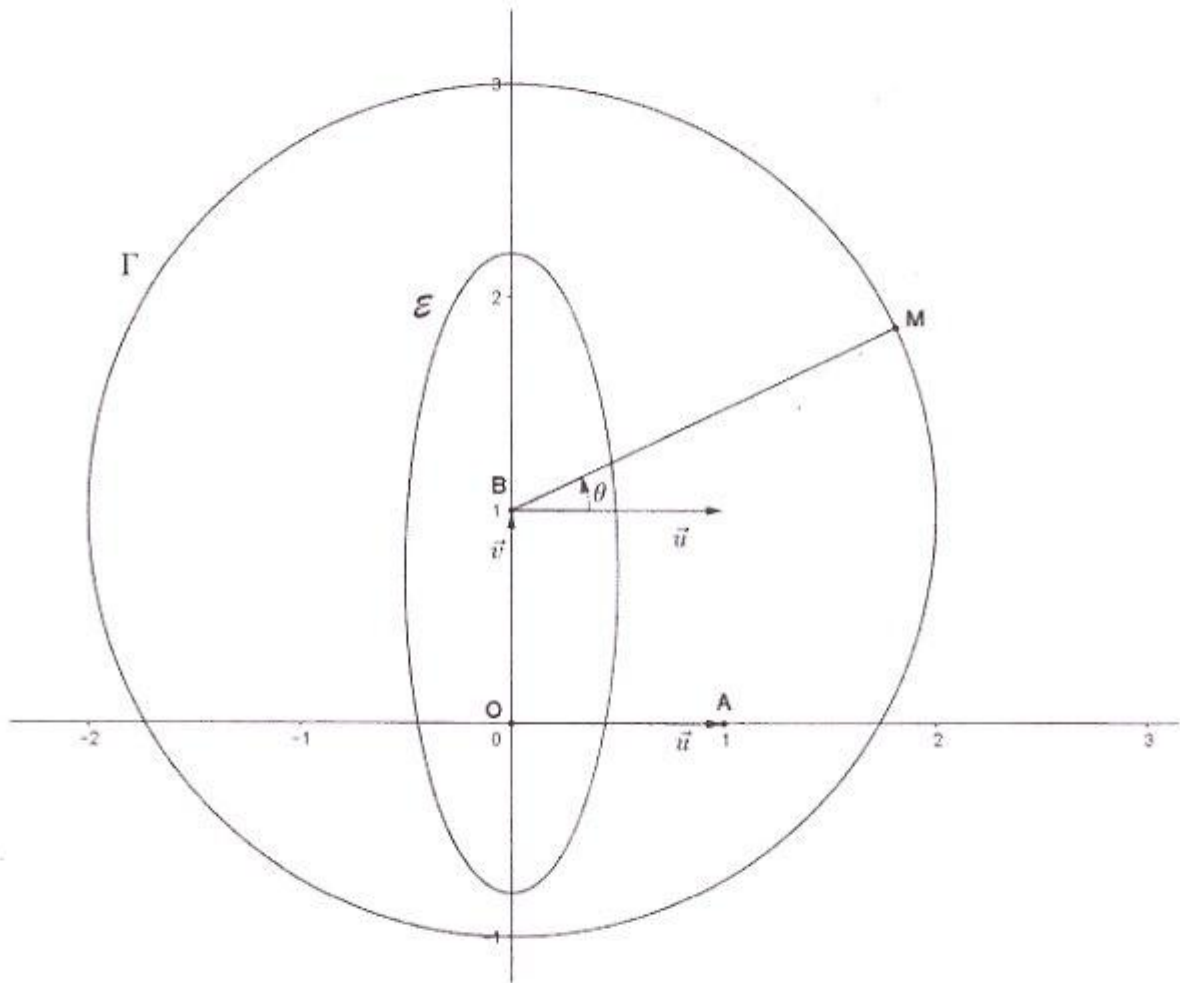


Figure 3