

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Session principale 2018

Section : Economie et gestion

Exercice 1 (5 points)

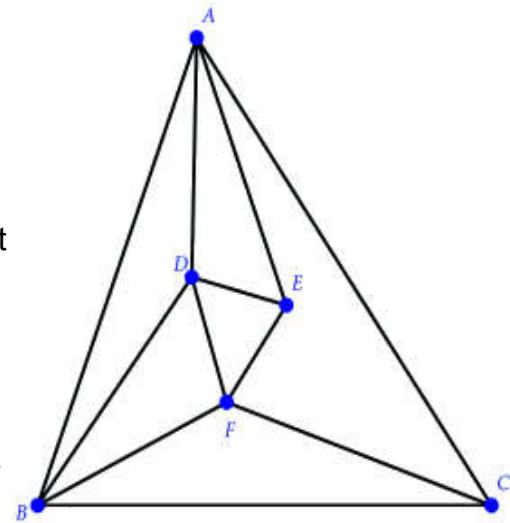
On considère le graphe G ci -contre

dont les sommets sont A,B,C,D,E et F dans cet **ordre**

1) Le graphe G est connexe car il existe toujours une chaîne reliant deux sommets distincts.

La chaîne A–B–C–F–E–D contient tous les sommets du graphe

2) Le graphe G est connexe et contient exactement deux sommets de degré impair E et C ($d^{\circ}E = d^{\circ}C = 3$)



Donc le graphe G admet au moins une chaîne eulérienne d'extrémités E et C

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degré	4	4	3	4	3	4

Un exemple de chaîne eulérienne C–B–F–D–B–A–C–F–E–D–A– E

3) a) On a $d^{\circ}C = 3$; impair; donc le graphe G n'admet pas un cycle eulérien.

b) Il suffit d'ajouter une arrête reliant les sommets E et C pour obtenir un graphe connexe contenant un cycle eulérien.

4) On note $\delta(G)$ le nombre chromatique du graphe G

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degré	4	4	3	4	3	4
couleur	C1	C2	C3	C1	C3	C2

D'ou $\delta(G)=3$

5)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6)

$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \\ 11 & 8 & 8 & 11 & 6 & 11 \\ 10 & 8 & 4 & 6 & 5 & 10 \\ 11 & 11 & 6 & 8 & 8 & 11 \\ 10 & 6 & 5 & 8 & 4 & 10 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Il existe 5 chaînes de longueur 3 reliant les sommets C à E

C-F-D-E ; C-A-D-E ; C-B-A-E ; C-B-F-E ; C-B-D-E

Exercice 2 (5 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N}^* par: $\begin{cases} U_1 = 800 \\ U_{n+1} = 0,7U_n + 300 \end{cases}$

1) a) Soit la propriété suivante P: " pour entier naturel non nul n on a : $U_n \leq 1000$ "

■ Pour $n=1$, on a $U_1 = 800 \leq 1000$ donc P est vraie à l'ordre 1.

■ Soit n entier naturel fixé ,

Supposons que P est vraie a l'ordre n et montrons que P est vraie à l'ordre n+1

On a $U_n \leq 1000$ donc $0,7U_n + 300 \leq 0,7 \times 1000 + 300$

donc $U_{n+1} \leq 1000$ D'ou P est vraie à l'ordre n+1

Donc pour tout entier naturel non nul n on a : $U_n \leq 1000$

b) $U_{n+1} - U_n = 0,7U_n + 300 - U_n = 0,7U_n - U_n + 300 = -0,3U_n + 300 = 0,3 \underbrace{(1000 - U_n)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } U_n \leq 1000}}$

$U_{n+1} - U_n \geq 0$ Donc la suite (U_n) est croissante.

c) On a la suite (U_n) est croissante et majorée par 1000. Donc la suite (U_n) est convergente ..

2) On considère la suite (V_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $V_n = 1000 - U_n$

a) Pour tout entier naturel non nul n ; $V_{n+1} = 1000 - U_{n+1}$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= 1000 - (0,7U_n + 300) \\ &= 1000 - 0,7U_n - 300 \\ &= 700 - 0,7U_n = 0,7(1000 - U_n) = 0,7 \cdot V_n \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel non nul; $V_{n+1} = 0,7 \cdot V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q=0,7$

b) (V_n) est une suite géométrique de raison $q=0,7$ et de premier terme $V_1 = 1000 - U_1=200$

$$\text{Donc } V_n = q^{n-1} \cdot V_1 = 200 \cdot (0,7)^{n-1}$$

c) On a pour tout entier naturel non nul n

$$V_n = 1000 - U_n \text{ équivaut à } U_n = 1000 - V_n$$

$$\text{équivaut à } U_n = 1000 - 200 \cdot (0,7)^{n-1}$$

$$\text{équivaut à } U_n = 200 \cdot (5 - (0,7)^{n-1})$$

Alors pour tout entier naturel non nul n $U_n = 200 \cdot (5 - (0,7)^{n-1})$

3) On a $U_n = 200 \cdot (5 - (0,7)^{n-1})$

le nombre de clients du magasin dépasse 990 Alors $U_n = 200 \cdot (5 - (0,7)^{n-1}) \geq 990$

$$\text{équivaut à } (5 - (0,7)^{n-1}) \geq \frac{990}{200}$$

$$\text{équivaut à } (0,7)^{n-1} \leq 5 - \frac{990}{200}$$

$$\text{équivaut à } (0,7)^{n-1} \leq 0,05$$

$$\text{équivaut à } \ln((0,7)^{n-1}) \leq \ln(0,05)$$

$$\text{équivaut à } (n-1) \ln(0,7) \leq \ln(0,05)$$

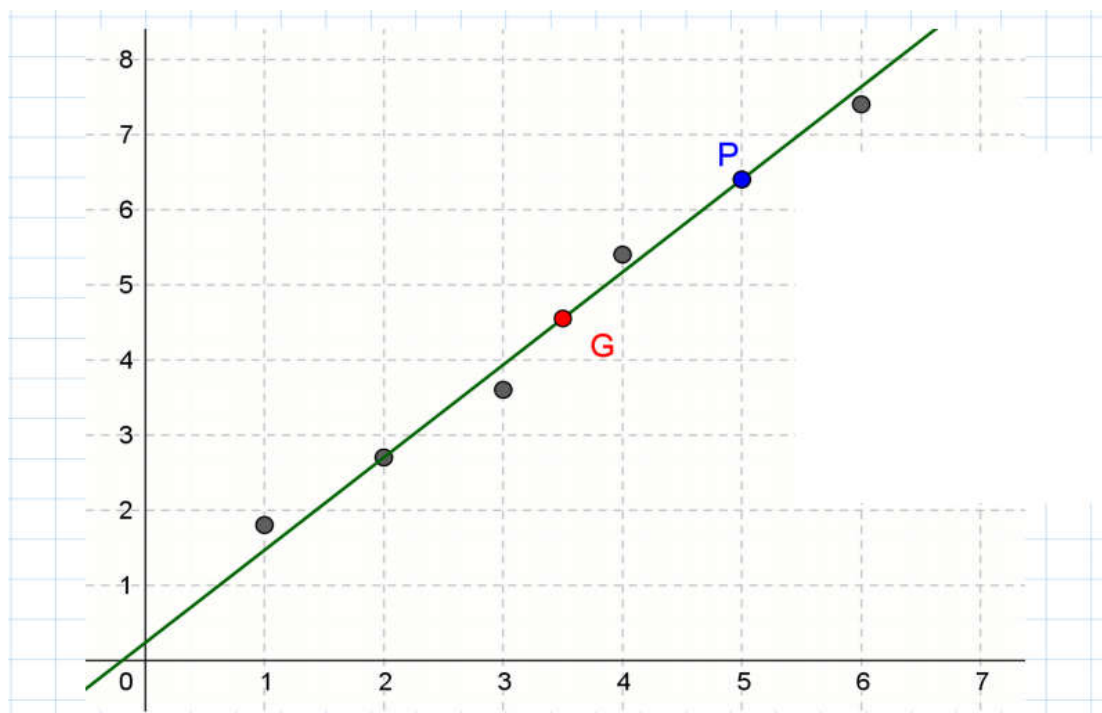
$$\text{équivaut à } (n-1) \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7)}$$

$$\text{équivaut à } n \geq 1 + \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7)} \approx 9,399$$

D'où à partir 10^{ème} mois le nombre de clients du magasin dépasse 990?

Exercice 3 (4 points)

1) a)



b) Oui, car la forme allongée du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

$$2) \bar{X} = \sum \frac{x_i}{6} = 3,5 \quad \text{et} \quad \bar{Y} = \sum \frac{y_i}{6} = 4,55 \quad \text{D'ou } G(3,5, 4,55)$$

3) a) on a $G(3,5, 4,55)$ et $P(5, 6,4)$ voir graphique

b) (GP): $y=ax+b$

$$a = \frac{y_P - y_G}{x_P - x_G} = \frac{6,4 - 4,55}{5 - 3,5} \approx 1,23$$

Or $G \in (GP)$ donc $y_G = ax_G + b$ alors $4,55 = 1,23 \times 3,5 + b$ d'ou $b = 4,55 - 1,23 \times 3,5 \approx 0,25$

D'ou (GP): $y = 1,23x + 0,25$

2004	2014	2024	2034
5	6	7	8

Pour $x=8$ $y = 1,23 \times 8 + 0,25 = 10,09$

La population de la Tunisie e milieux urbains en 2034 est 10,09 millions.

Exercice 4 (6 points)

1) Le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
g(x)	+	0	-

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x + 1(1 - x)e^x$ On Désigne par C sa courbe representative dans un réper orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$

On a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = x + (1 - x)e^x$

$$f'(x) = 1 + (-1)e^x + (1 - x)e^x$$

$$= 1 - e^x + e^x - xe^x = 1 - xe^x = g(x)$$

b) pour $x > 0$ on a : $f(x) = x + (1 - x)e^x = x \left[\frac{x}{x} + \frac{1-x}{x} e^x \right]$

$$= x \left[1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x} \right) e^x \right] = x \left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^x \right]$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^x \right] = -\infty$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

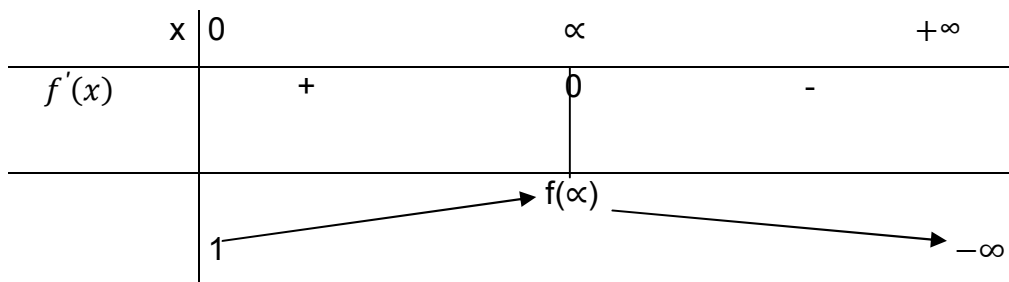
c) On a : $g(\alpha) = 0$ donc $1 - \alpha e^\alpha = 0$ donc $\alpha e^\alpha = 1$. Donc $\alpha e^\alpha = 1$.

Donc $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

On a : $f(\alpha) = \alpha + (1 - \alpha)e^\alpha = \alpha + e^\alpha - \alpha e^\alpha = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha^2 + 1 - \alpha}{\alpha}$

d'où $f(x) = \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha}$

3) On a $f'(x) = g(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$



En effet : $f(0) = 0 + (1 - 0)e^0 = 1 * 1 = 1$

4/a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^x \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Donc la courbe C admet une branche parabolique de direction celle de la droite (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$

b) Déterminer une équation de la demi-tangente T à C au point d'abscisse 0

$$T: y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ et } x \geq 0$$

On a : $f'(0) = g(0) = 1 - 0 * e^0 = 1$ et $f(0) = 1$

Donc $T: y = 1 * x + 1 = x + 1$ et $x \geq 0$

$$\text{D'où } T = \begin{cases} y = x + 1 \\ \text{et} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

c) Tracer C et T dans (O, \vec{i}, \vec{j}) (On prendra $a = 0,6$ et on arrondira $f(a)$ à 10^{-1} près)

$$\alpha = 0,06: f(x) \approx 1,2666 \text{ à } 10^{-1} \quad f(\alpha) = 1,3$$

5) Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = (2 - x)e^x + \frac{x^2}{2}$

a) Vérifier F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$.

Pour $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}F'(x) &= (-1) + (2 - x)e^x + \frac{2x}{2} \\&= -e^x + (2 - x)e^x + x \\&= (-1 + 2 - x)e^x + x \\&= (1 - x)e^x + x \\&= x + (1 - x)e^x \\&= f(x)\end{aligned}$$

On a : $F'(x) = f(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$ Donc F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$

b) En déduire en unités d'aires ,L'aire A de la partie du plan délimitée C à l'axe de abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

On a : $A = \int_0^1 |f(x)| dx$

On a $f(1) = 1 + (1 - 1)e^1 = 1$, donc $f(x) \geq 0$

Pour $x \in [0,1]$ donc $A = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (2 - 1)e^1 + \frac{1^2}{2} - \left[(2 - 0)e^0 + \frac{0^2}{2} \right]$

D'où $A = e + \frac{1}{2} - 2 = e - \frac{3}{2}$ U.a