

Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences de l'informatique)

Session principale 2018

Exercice 1 : (4points)

$$1) z^2 - (1+i)z + i = 0$$

$$\Delta = (1+i)^2 - 4i = -2i = (1-i)^2 \text{ donc } 1-i \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

$$z_1 = \frac{1+i+1-i}{2} = 1 \quad z_2 = \frac{1+i-1+i}{2} = i \quad \text{donc } S_{\mathbb{C}} = \{1, i\}$$

Autrement :

$z_1 = 1$ est une solution apparente donc $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{i}{1}$ est la deuxième solution

$$2)a) z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2+1 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

$$b) z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2 \text{ donc } \delta = i\sqrt{3} \text{ une racine carrée de } \Delta$$

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ; \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

$$z + \frac{1}{z} = i \Leftrightarrow z^2 + 1 = iz \Leftrightarrow z^2 - iz + 1 = 0$$

$$\Delta = (-i)^2 - 4 = -5 = (i\sqrt{5})^2 \text{ donc } \delta = i\sqrt{5} \text{ une racine carrée de } \Delta$$

$$z_1 = \frac{i(1-\sqrt{5})}{2} ; \quad z_2 = \frac{i(1+\sqrt{5})}{2} \quad S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{i(1-\sqrt{5})}{2}, \frac{i(1+\sqrt{5})}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} 3)a) \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1+i)\left(z + \frac{1}{z}\right) + i &= z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 - (1+i)z - \left(\frac{1+i}{z}\right) + i \\ &= \frac{z^4 + 1 + 2z^2 - (1+i)z^3 - (1+i)z + iz^2}{z^2} \\ &= \frac{z^4 - (1+i)z^3 + (2+i)z^2 - (1+i)z + 1}{z^2} = \frac{p(z)}{z^2} \end{aligned}$$

$$b) p(z) = 0, z = 0$$

$$\frac{p(z)}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1+i)\left(z + \frac{1}{z}\right) + i = 0$$

$$\text{On pose } Z = z + \frac{1}{z}; p(z) = 0 \Leftrightarrow Z^2 - (1+i)Z + i = 0 \text{ et } Z = z + \frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow Z = 1 \text{ ou } Z = i \text{ et } Z = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1 \text{ ou } z + \frac{1}{z} = i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ou } z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ou } z = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i \quad \text{ou } z = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)i, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i \right\}$$

Exercice 2 : (4 points)

$$1) A^2 = AxA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$$

$$2) a) *) (4I_3 - A)xB = (4I_3 - A)(I_3 + A) = 4I_3 + 4A - A - A^2 = 4I_3 + 3A - 3A + 4I_3 = 4I_3$$

$$*) Bx(4I_3 - A) = (I_3 + A)(4I_3 - A) = 4I_3 - A + 4A - A^2 = 4I_3 + 3A - 3A = 4I_3$$

$$b) \text{ On } Bx(4I_3 - A) = 4I_3 \Leftrightarrow Bx\left(\frac{4I_3 - A}{4}\right) = I_3 \Leftrightarrow Bx\left(I_3 - \frac{1}{4}A\right) = I_3$$

$$\text{donc } B \text{ est inversible et } B^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}A$$

$$3)a)(s) : \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Bx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \text{ et } y = \frac{-7}{4} \text{ et } z = \frac{1}{4}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{9}{4}, \frac{-7}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

Exercice 3 : (6 points)

$$1)a) U_{n+1} = x_{n+1} - 1 = 3x_n - 2 - 1 = 3(x_n - 1) = 3U_n$$

(U_n) est une suite géométrique de raison $q=3$ et 1^{er} terme $U_0 = x_0 - 1 = 4$

$$b) U_n = x_n - 1 \text{ donc } x_n = U_n + 1 = 4 \times 3^n + 1$$

2)a) soit $d = \text{pgcd}(x_n, x_{n+1})$ donc d divise x_n et x_{n+1} donc d divise $3x_n - x_{n+1}$ donc d divise 2

b) $\text{pgcd}(x_n, x_{n+1})$ divise 2 donc $\text{pgcd}(x_n, x_{n+1}) \in \{1, 2\}$ Or $x_n = 4 \times 3^n + 1$ est impair donc $\text{pgcd}(x_n, x_{n+1}) = 1$

$$3)a) \text{ pour } n = 0 ; 5x_0 - 4y_0 = 21$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $5x_n - 4y_n = 21$

Montrons que $5x_{n+1} - 4y_{n+1} = 21$

$$\begin{aligned} 5x_{n+1} - 4y_{n+1} &= 5(3x_n - 2) - 4(3y_n + 8) = 15x_n - 10 - 12y_n - 32 \\ &= 3(5x_n - 4y_n) - 42 = 3 \times 21 - 42 = 21 \end{aligned}$$

Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}$ $5x_n - 4y_n = 21$

b) On a $5x_n - 4y_n = 21$ donc $4y_n = 5x_n - 21$ donc $4y_n = 5(4 \times 3^n + 1) - 21$ donc $y_n = 5 \times 3^n - 4$

c) Soit $d' = \text{pgcd}(x_n, y_n)$ donc d' divise x_n et y_n d' divise $5x_n - 4y_n$ donc d' divise 21 $d' \in \{1, 3, 7, 21\}$

4)a) le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 est

$$1 \text{ si } n \equiv 0[6]$$

$$3 \text{ si } n \equiv 1[6]$$

$$2 \text{ si } n \equiv 2[6]$$

$$6 \text{ si } n \equiv 3[6]$$

$$4 \text{ si } n \equiv 4[6]$$

$$5 \text{ si } n \equiv 5[6]$$

b) si $n \equiv 5[6]$ alors $3^n \equiv 5[7]$ donc $4 \times 3^n \equiv 6[7]$ donc $4 \times 3^n + 1 \equiv 0[7]$ donc $x_n \equiv 0[7]$

si $n \equiv 5[6]$ alors $4 \times 3^n \equiv 6[7]$ donc $5 \times 3^n - 4 \equiv 0[7]$ donc $y_n \equiv 0[7]$

D'où $\text{pgcd}(x_n, y_n) \in \{7, 21\}$ or x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3 donc $\text{pgcd}(x_n, y_n) = 7$

c) $2018 \equiv 2[6]$ car $2018 = 6 \times 336 + 2$ alors $4 \times 3^{2018} + 1 \equiv 4 \times 2 + 1[7]$

donc $4 \times 3^{2018} + 1 \equiv 2[7]$ donc $x_{2018} \equiv 2[7]$ donc x_{2018} n'est pas divisible par 7

$4 \times 3^{2018} + 1 \equiv 1[3]$ et $x_{2018} = 4 \times 3^{2018} + 1$ donc x_{2018} n'est pas divisible par 3

donc $\text{pgcd}(x_{2018}, y_{2018}) \notin \{3, 7, 21\}$ or $\text{pgcd}(x_{2018}, y_{2018}) \in \{1, 3, 7, 21\}$

donc $\text{pgcd}(x_{2018}, y_{2018}) = 1$

Exercice 4 : (6 points)

1) a) $f_n'(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n}$ donc $f_n'(x) > 0$ pour tout réel x

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) $f(0) = e^{\frac{0}{n}} = 1$ donc C_n passe par $J(0,1)$

c) $n+1 > n$ donc $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ donc $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$

donc si $x \in [0, +\infty[$ alors $-\frac{x}{n} < -\frac{x}{n+1}$ et $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ et C_n est au dessous de C_{n+1}

donc si $x \in]-\infty, 0]$ alors $-\frac{x}{n} > -\frac{x}{n+1}$ et $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ et C_n est au dessus de C_{n+1}

La courbe tracée en trait interrompu celle de C_3

La courbe tracée en trait continu celle de C_1

3) a) $g_n'(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n} - 1$ pour tout réel positif x donc $g_n'(x) < 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{n}} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\frac{1}{n} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{(-\frac{x}{n})} - 1 \right) = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g_n'(x)$	-	
$g_n(x)$	$+\infty$	$-\infty$

b) D'après la question précédente g_n est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} donc l'équation $g_n(x) = 0$

admet une solution unique, soit x_n cette solution. $g_n(0) = 1$ et $g_n(1) = e^{-\frac{1}{n}} - 1$ or $-\frac{1}{n} < 0$ donc

$e^{-\frac{1}{n}} < 1$ donc $g_n(0) \times g_n(1) < 0$ et par suite $x_n \in]0, 1[$.

c) $g_n(x_n) = 0$ donc $f_n(x_n) = x_n$ donc x_n est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_n et la droite $\Delta : y = x$

d) voir figure.

$$4) a) g_{n+1}(x_n) = e^{-\frac{x_n}{n+1}} - x_n - (e^{-\frac{x_n}{n}} - x_n) = e^{-\frac{x_n}{n+1}} - x_n - e^{-\frac{x_n}{n}} + x_n = e^{-\frac{x_n}{n+1}} - e^{-\frac{x_n}{n}}$$

$$b) \frac{x_n}{n+1} < \frac{x_n}{n} \text{ donc } -\frac{x_n}{n+1} > -\frac{x_n}{n} \text{ donc } e^{-\frac{x_n}{n+1}} > e^{-\frac{x_n}{n}} \text{ donc } e^{-\frac{x_n}{n+1}} - e^{-\frac{x_n}{n}} > 0$$

$$\text{or } g_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \text{ et } g_{n+1}(x_n) = e^{-\frac{x_n}{n+1}} - e^{-\frac{x_n}{n}} \text{ donc } g_{n+1}(x_n) > g_{n+1}(x_{n+1})$$

or g_n est strictement décroissante donc $x_n < x_{n+1}$ donc (x_n) est croissante

c) (x_n) est croissante et majorée par 1 donc (x_n) est convergente, soit α cette limite

$$0 < x_n < 1 \text{ donc } 0 < \frac{x_n}{n} < \frac{1}{n} \text{ donc } -\frac{1}{n} < -\frac{x_n}{n} < 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x_n}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x_n}{n}} = 1$$

$$\text{or } g_n(x_n) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x_n) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x_n}{n}} - x_n = 1 \text{ donc } \alpha = 1$$

