RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	Session principale	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 : (3 points)

Le tableau ci-dessous donne la répartition d'une population en trois catégories, selon l'indice de masse corporelle (IMC) exprimé en kg/m^2.

Catégorie	$(IMC < 25)$ Personnes de poids normal	$(25 \leq IMC < 30)$ Personnes en surpoids	$(IMC \geq 30)$ Personnes obèses
Pourcentage	50%	30%	20%

Une étude a montré que :

- 3% des personnes de poids normal sont diabétiques.
- 7% des personnes en surpoids sont diabétiques.
- 9 % des personnes obèses sont diabétiques.

On choisit au hasard une personne de cette population et on considère les événements suivants :

A : « La personne choisie est de poids normal ».

B : « La personne choisie est en surpoids ».

C : « La personne choisie est obèse ».

D : « La personne choisie est diabétique ».

1) a) Déterminer $p(A \cap D)$, $p(B \cap D)$ et $p(C \cap D)$.

b) Montrer que $p(D) = 0.054$.

c) Calculer la probabilité que la personne choisie ne soit pas de poids normal sachant qu'elle est diabétique. (On donnera le résultat arrondi à 10^{-3})

2) On choisit, au hasard, n personnes de cette même population. On désigne par p_n la probabilité qu'aucune personne n'est diabétique.

a) Exprimer p_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n \leq 0.1$.

Exercice 2 : (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la **figure de l'annexe ci-jointe** (page 4/4), on a placé les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = \frac{1}{2} z_A^2$, ainsi que le milieu I du segment $[AB]$.

1) a) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b) Vérifier que l'affixe du point I est $z_I = (\frac{1+\sqrt{3}}{2})(1+i)$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 2z - 2(1+\sqrt{3})(1+i) = 0$.

Soit M et N deux points d'affixes respectives z et $\frac{1}{2}z^2$ où z est un nombre complexe non nul et différent de 2.

a) Montrer que le point I est le milieu de $[MN]$, si et seulement si, z est une solution de (E).

b) Justifier que z_A est une solution de (E).

3) Soit z_C la deuxième solution de (E), C le point d'affixe z_C et K le point d'affixe (-2).

a) Donner la valeur de $z_A + z_C$.

b) Montrer que le quadrilatère OAKC est un parallélogramme. Construire alors le point C.

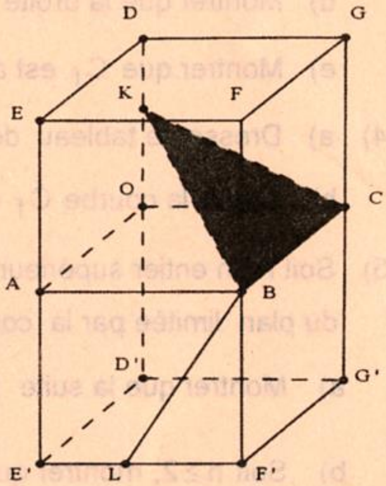
c) Soit le point D d'affixe $z_D = \frac{1}{2}z_C^2$. Construire dans l'annexe le point D.

4) a) Ecrire $(1+i)$ sous forme exponentielle. En déduire que $z_A \cdot z_C = 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i(\frac{5\pi}{4})}$

b) Montrer que les points O, A et D sont alignés.

Exercice 3 : (5 points)

Dans la figure ci-contre, OABCDEFG et OABCD'E'F'G' sont deux cubes identiques d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$. Les points K et L sont définis par $\overrightarrow{OK} = a\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{E'L} = (1-a)\overrightarrow{OC}$ où a est un réel de l'intervalle $]0,1[$.



1) a) Donner les coordonnées des points C, B, F et K.

b) Montrer que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

c) Calculer le volume du tétraèdre FBCK.

2) Soit P le plan (BCK).

Montrer qu'une équation de P est $ay + z - a = 0$.

3) a) Donner les coordonnées de E'. En déduire que $L(1, 1-a, -1)$.

b) Montrer que B est le projeté orthogonal du point L sur le plan P.

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2(a-1)y + 2z + 1 - 2a = 0$.

a) Montrer que (S) est la sphère de centre L est de rayon $R = \sqrt{2+a^2}$

b) Montrer que (S) et P se coupent suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 4 : (7 points)

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+e^{-x}$.

a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On a dressé ci-contre, le tableau de variation de **g' la fonction dérivée** de g.

x	$-\infty$		$+\infty$
g'			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

b) Montrer que l'équation $g'(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique β et vérifier que $0.3<\beta<0.4$.

c) Déterminer le signe de $g'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Dans la suite, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{g(x)}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)$ et $f'(x)$ ont même signe.

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Vérifier que pour tout réel $x>0$, $f(x)-x=\dfrac{e^{-x}}{f(x)+x}$.

d) Montrer que la droite $\Delta : y=x$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

e) Montrer que C_f est au-dessus de la droite Δ.

4) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe C_f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prendra $\beta\simeq 0.35$)

5) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par a_n l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par la courbe C_f, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=n$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

b) Soit $n\geq 2$, montrer que pour tout $x\in[1,n]$, $\dfrac{e^{-x}}{n+f(n)}\leq f(x)-x\leq\dfrac{e^{-x}}{1+f(1)}$.

c) En déduire que pour tout $n\geq 2$, $\dfrac{e^{-1}-e^{-n}}{n+f(n)}\leq a_n\leq\dfrac{e^{-1}-e^{-n}}{1+f(1)}$.

d) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

6) a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-4} de chacun des nombres $\dfrac{e^{-1}-e^{-2}}{2+f(2)}$ et $\dfrac{e^{-1}}{1+f(1)}$.

b) On note $L=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que $0.05<L<0.17$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session principale (2020)
Annexe à rendre avec la copie