MATHÉMATIQUES
Section : Mathématiques
Session de contrôle 2021

Exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1) On note r_1 et r_2 les restes possibles modulo 6 respectivement des entiers a et a^2.

r_1	0	1	2	3	4	5
r_2	0	1	4	3	4	1

Donc les restes possibles modulo 6 de a^2 sont 0, 1, 3 et 4.

2) On note r_1, r_2 et r_3 les restes possibles modulo 6 respectivement des entiers a, a^2 et a^3.

r_1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
r_2	0	1	4	3	4	1
$r_3 = r_1.r_2$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

D'après le tableau on a : $r_3 = r_1$, par suite $a^3 \equiv a \pmod 6$

3) a/ * Pour $n = 0$ on a : $a^{2\times0+1} \equiv a \pmod 6$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

* Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $a^{2n+1} \equiv a \pmod 6$ alors $a^{2n+3} \equiv a \pmod 6$

On a : $a^{2n+3} = a^{2n+1} \times a^2$ donc $a^{2n+3} \equiv a^{2n+1} \times a^2 \pmod 6 \equiv a^3 \pmod 6 \equiv a \pmod 6$

Ainsi si la propriété est vraie pour n alors elle est vraie pour (n + 1).

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n+1} \equiv a \pmod 6$

b/ On a : $a^{2n} = a \times a^{2n-1}$.

Pour tout $n \geq 1$, $a^{2(n-1)+1} \equiv a \pmod 6$ (d'après 3) a/)

D'où $a^{2n-1} \equiv a \pmod 6$ par suite $a^{2n} \equiv a^2 \pmod 6$

4) D'après 3) a/ on a : $x^{2\times3+1} \equiv x \pmod 6$ d'où $x^7 \equiv x \pmod 6$

$$x^{2\times1+1} \equiv x \pmod 6 \text{ d'où } x^3 \equiv x \pmod 6$$

D'après 3) b/ on a : $x^{2\times4} \equiv x^2 \pmod 6$ d'où $x^8 \equiv x^2 \pmod 6$

$$\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0 \pmod 6 \\ x^3.y^2 \equiv 1 \pmod 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 \equiv 0 \pmod 6 \\ x.y^2 \equiv 1 \pmod 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 \equiv 0 \pmod 6 \\ y^4 \equiv 1 \pmod 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1(\mathrm{mod}\,6) \\ y^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1(\mathrm{mod}\,6) \\ y \equiv 1(\mathrm{mod}\,6) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 1(\mathrm{mod}\,6) \\ y \equiv 5(\mathrm{mod}\,6) \end{cases}$$

$S_{Z^2} = \{(1 + 6k, 1 + 6k) ; (1 + 6k, 5 + 6k)\ k \in Z\}$

Exercice 2 :

1) On a : AB = AC et AC = AF d'où AB = AF.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF})\ 2\pi$

$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\ 2\pi$

D'où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{5\pi}{6}\ 2\pi$, par suite $r_1(B) = F$.

On a : AE = AB et AB = AC d'où AE = AC.

$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ 2\pi$

$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\ 2\pi$

D'où $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{5\pi}{6}\ 2\pi$,par suite $r_1(E) = C$.

2) a/ On a : AB = AC et O milieu de [BC] donc (AO) est la médiatrice de [BC].
D'où S(B) = C.
On suppose que S(E) = E'.
On a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE'})\ 2\pi$ d'où $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE'}) \equiv \frac{\pi}{3}\ 2\pi$.
Or $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{3}\ 2\pi$ donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE'}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF})\ 2\pi$ d'où $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE'}) \equiv 0\ 2\pi$ (1)
On a : S(E) = E' donc AE = AE', d'autre part AE = AB = AC = AF donc AF = AE'(2)
D'après (1) et (2) on a : F = E', d'où S(E) = F.
On a : S(B) = C et S(E) = F donc s([BE]) = [CF].

b/ On a : $(BE) \cap (CF) = \{\Omega\}$ et S((BE)) = (CF), S((CF)) = (BE)
Comme $(BE) \cap (CF) = \{\Omega\}$ alors $S(\Omega) = \Omega$.
Par suite $\Omega \in (OA)$.

3) a/ On a : f([BE]) = [CF] donc f(B) = C et f(E) = F ou f(B) = F et F(E) = C.
- Si f(B) = F et f(E) = C alors f = r_1 car r_1 est l'unique déplacement qui envoi B en F et E en C.
- Si (B) = C et f(E) = F alors f est un déplacement d'angle $\theta \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})\ 2\pi$.

Or on a $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FC}) \equiv \frac{5\pi}{6}\ 2\pi$ (car $r_1(B) = F$ et $r_1(E) = C$) donc $\theta \equiv \frac{5\pi}{6} - \pi\ 2\pi \equiv -\frac{\pi}{6}\ 2\pi$

Comme $\theta \neq 2k\pi,\ k \in Z$ alors f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$

On considère la rotation r_2 de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{6}$

- ✓ On a $\Omega B = \Omega C$ (car $\Omega \in med([BC])$) et $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})\ 2\pi$ donc

  $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ 2\pi$ par suite $r_2(B) = C$.

- ✓ On a $\Omega E = \Omega F$ (car $\Omega \in med([EF])$) et $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega F}) \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})\ 2\pi$ donc

  $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega F}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ 2\pi$ par suite $r_2(E) = F$.

Par suite $f = r_2$ car r_2 est l'unique déplacement qui envoi B en C et E en F.

b/ On a : $r_2(B) = C$, $r_2(E) = F$ et $r_2(A) = A'$ alors $CA' = BA = CA$ donc A' est un point du cercle ζ de centre C et passant par A, et $A' \neq A$.

D'autre part on a : $FA' = EA = FA$ donc A' est un point du cercle ζ' de centre F et passant par A et $A' \neq A$.

Conclusion : $(\zeta \cap \zeta') \setminus \{A\} = \{A'\}$ (Voir **Figure**)

On a : $CA' = CA$ et $FA' = FA$ et comme on a $CA = FA$ alors $CA' = CA = FA = FA'$ d'où le quadrilatère ACA'F est un losange.

4) On a g est antidéplacement tel que $g(B) = F$ et $g(E) = C$.

a/ On a : $med([BF]) \neq med([EC])$ car (BF) et (EC) ne sont pas parallèles, donc g n'est pas une symétrie orthogonale par suite g est une symétrie glissante.

b/ On a : AEB est un triangle équilatéral direct alors son image par g est un triangle équilatéral direct.

Comme on a $g(B) = F$, $g(E) = C$ et A'CF est un triangle équilatéral direct alors $g(A) = A'$.

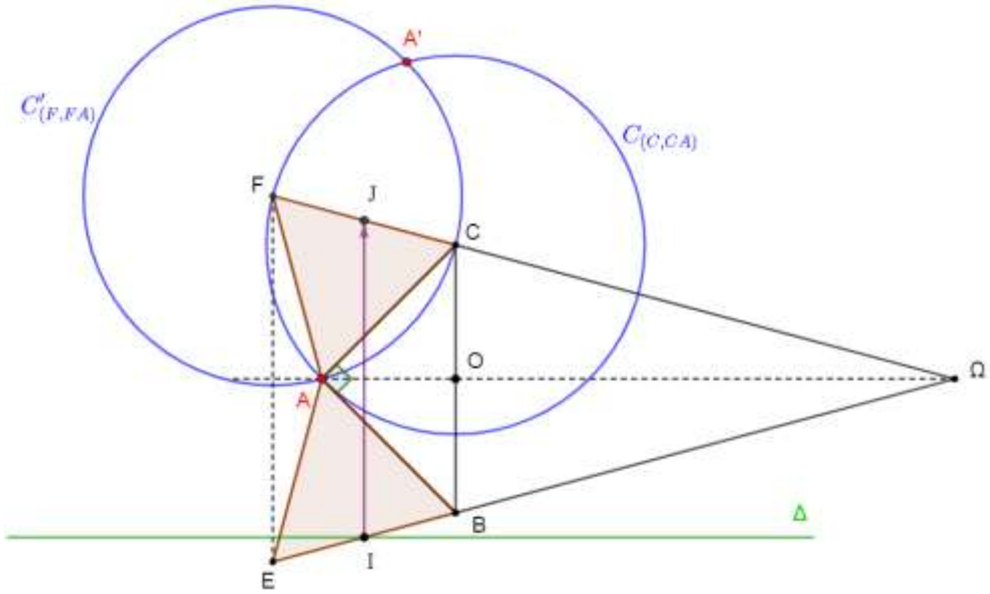
c/ Soit Δ l'axe de g et $\vec{u}$ son vecteur, alors on a $g = t_{\vec{u}} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o t_{\vec{u}}$

$g(A) = A'$ et J milieu de [AA'] alors $J \in \Delta$ (d'après 3) b))

$g(I) = J$ alors le milieu de [IJ] appartient à Δ d'où $\Delta = (IJ)$.

$g(I) = J \Leftrightarrow t_{\vec{u}} o S_{\Delta}(I) = J \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(I) = J \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{IJ}$

Figure



Exercice 3 :

1) a/ $\Delta=-\frac{1}{3}=(\frac{i}{\sqrt{3}})^2$

$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i$ et $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}i$

$S_C=\{z_1\,;\,z_2\}$

b/ $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) On a : $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Ainsi $\text{Ré}\left(z_1\right)=-\frac{1}{2}$ et $\arg\left(z_1\right)\equiv\arg\left(z_B\right)\left[2\pi\right]\equiv\arg(z_C)\left[2\pi\right]$

Par suite $z_C=z_1$

3) a/ $z_D=\frac{1}{\sqrt{3}}i$

$(z_1)^3=(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}})=\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}i=z_D$

b/ $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{z_1{}^3-1}{z_1-1}=\frac{(z_1-1)(z_1{}^2+z_1+1)}{(z_1-1)}=z_1{}^2+z_1+1$

z_1 est solution de l'équation (E) donc $z_1{}^2+z_1+1=z_1{}^2+z_1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

Par suite $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{2}{3}$

c/ On a : $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{2}{3}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires d'où $D\in(AC)$.

D'autre part $z_D=\frac{1}{\sqrt{3}}i$ donc le point $D\in(O,\vec{v})$

Par suite $(AC)\cap(O,\vec{v})=\{D\}$.

4) $z^2+z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}^2+\bar{z}=z^2+z\Leftrightarrow(\bar{z}-z)(z+\bar{z}+1)=0\Leftrightarrow\bar{z}=z$ ou $2\text{Re}(z)=-1$

D'où $z^2+z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ou $\text{Re}(z)=-\frac{1}{2}$

5) a/ $M(z)$, $N(z^3)$.

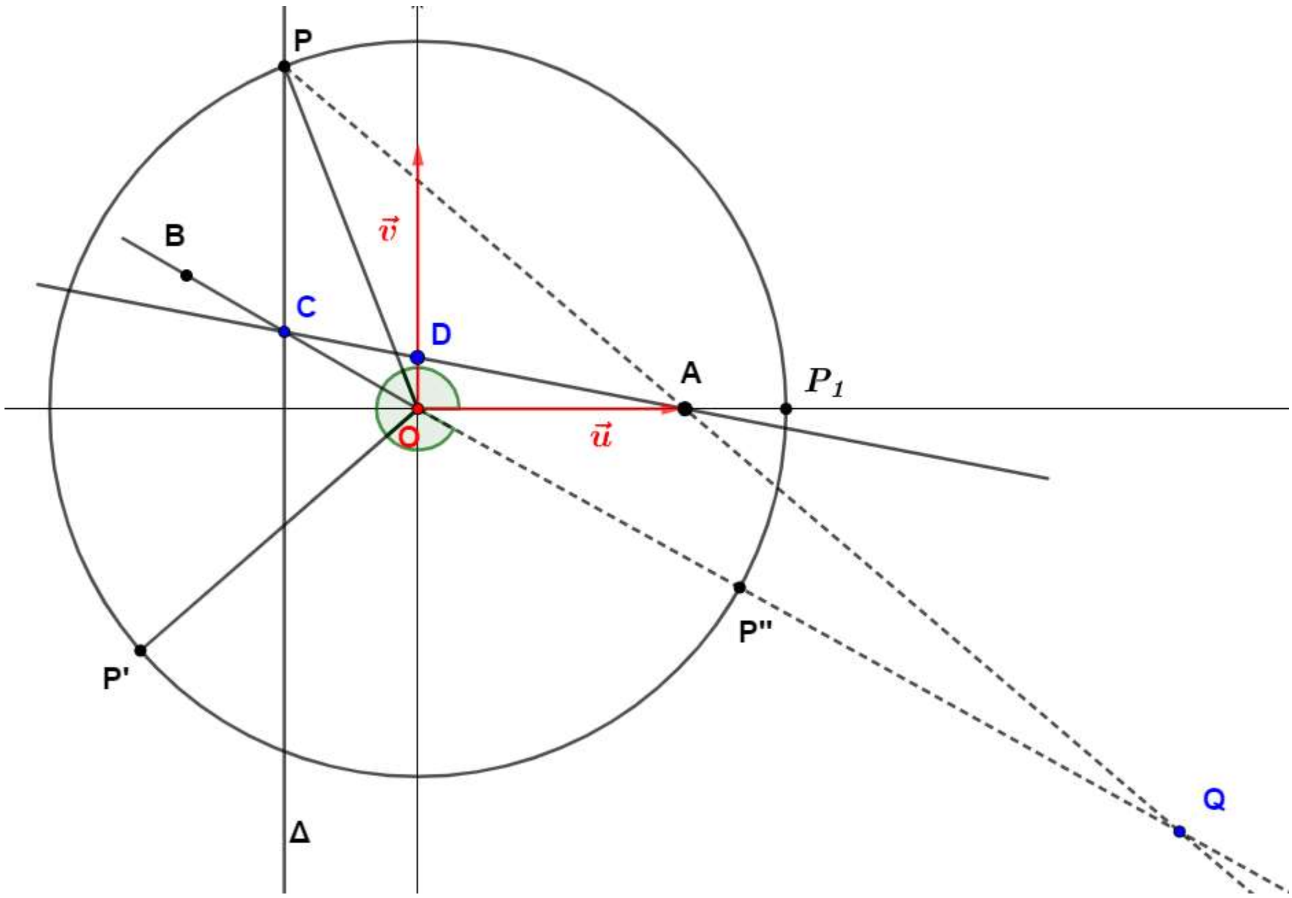
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow\frac{z^3-1}{z-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(z^2+z+1)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(z^2+z)\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ou $\text{Re}(z)=-\frac{1}{2}$

Par suite l'ensemble des point M tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires est $\Delta\cup(O,\vec{u})\setminus\{A\}$

b/ On a $P\in\Delta$ alors $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont colinéaires.

De plus $\alpha\neq0$ alors $(\vec{u},\overrightarrow{OQ})\equiv\arg(\alpha^3)\ 2\pi\ \equiv3(\vec{u},\overrightarrow{OP})\ 2\pi$



Exercice 4 :

Partie A

1) a/ On a : $g'(x) < 0$ pour tout $x < -1$
$g'(x) > 0$ pour tout $x > -1$
$g'(-1) = 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

b/ $g(x) < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in -\infty, \beta$ d'où $S_{IR} = -\infty, \beta$

$g(x) < 1 \Leftrightarrow x \in -\infty, \alpha$ d'où $S_{IR} = -\infty, \alpha$

2) On suppose que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$ alors $e^{\alpha} \leq \sqrt{e}$ d'où $\alpha e^{\alpha} \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{e}$ d'où $g(\alpha) \leq \sqrt{\dfrac{e}{4}}$ ce qui est absurde car $g(\alpha) = 1$ et par suite $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Autrement : $g(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} \simeq 0,82 < 1$ d'après 1) b) On a : $\dfrac{1}{2} \in -\infty, \alpha$

3) a/ $f(\alpha)=0$ et $f(\beta)=\beta e^{\beta}-\left(\beta e^{\beta}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

b/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(g(x))^2\right]=0-0=0.$

La droite d'équation : y = 0 est une asymptote horizontale à (ζ) au voisinage de (-∞)

c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(g(x))^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\left[1-g(x)\right]=(+\infty)\times(-\infty)=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left[1-xe^{x}\right]=(+\infty)\times(-\infty)=-\infty.$

La courbe (ζ) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de (+∞).

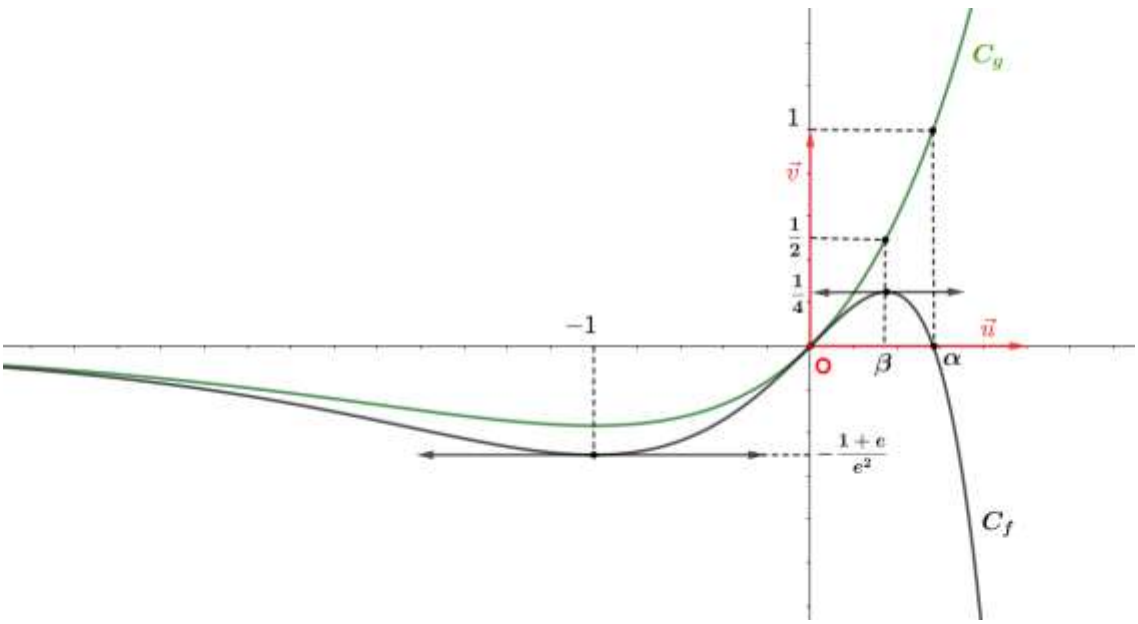
4) a/ On a f(x) = g(x) – (g(x))² donc $f'(x)=g'(x)-2g'(x)g(x)=2g'(x)\left[\frac{1}{2}-g(x)\right]$

b/ $f'(x)=0$ sig $g'(x)=0$ ou $g(x)=\frac{1}{2}$

sig x = -1 ou x = β

x	$-\infty$		-1		β		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{2}-g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1+e}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

c/



5) a/ $\mathcal{A} = \int_0^{\alpha} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\alpha} (g(x) - f(x))dx = \int_0^{\alpha} (g(x))^2 dx = \int_0^{\alpha} x^2 e^{2x} dx.$

On pose $U(x) = x^2 \to U'(x) = 2x$

$$V'(x) = e^{2x} \to V(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\alpha^2e^{2\alpha} - \int_0^{\alpha} xe^{2x}dx.$$

On a : $g(\alpha) = 1$ donc $\frac{1}{2}\alpha^2e^{2\alpha} = \frac{1}{2}(g(\alpha))^2 = \frac{1}{2}$

Par suite $\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \int_0^{\alpha} xe^{2x}dx.$

b/ Par une intégration par parties de l'intégrale $\int_0^{\alpha} xe^{2x}dx.$ on a :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^{\alpha} + \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} + \frac{1}{4}e^{2\alpha} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha}\alpha^2e^{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}\alpha^2e^{2\alpha}$$

Comme $\alpha^2e^{2\alpha} = 1$ alors $\mathcal{A} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}$

Partie B

1) a/ On a pour tout $x \in [0, \alpha]$, $1 \le e^{nx} \le e^{n\alpha}$ et $x^n \ge 0$ alors $0 \le x^n e^{nx} \le x^n e^{n\alpha}$

D'où $0 \le \int_0^{\alpha} x^n e^{nx} dx \le e^{n\alpha} \int_0^{\alpha} x^n dx$

Ainsi $0 \le J_n \le \frac{\alpha^{n+1}e^{n\alpha}}{n+1}$ de plus $\alpha^{n+1}e^{n\alpha} = \alpha\left(\alpha e^{\alpha}\right)^n = \alpha \times 1 = \alpha$

Par suite $0 \le J_n \le \frac{\alpha}{n+1}$

b/ On a $0 \le J_n \le \frac{\alpha}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{n+1} = 0$

Par suite $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$

2) a/ Pour $n \ge 2$ on a $0 \le \alpha - \frac{1}{n}$ car $\alpha > \frac{1}{2}$

On a : $J_n = \int_0^{\alpha} (g(x))^n dx = \int_0^{\alpha-\frac{1}{n}} (g(x))^n dx + \int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} (g(x))^n dx$

On a $0 \le \alpha - \dfrac{1}{n}$ et $(g(x))^n \ge 0$ pour tout $x \in \left[0, \alpha - \dfrac{1}{n}\right]$ donc $\int_0^{\alpha-\frac{1}{n}} (g(x))^n dx \ge 0$

Par suite $\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} (g(x))^n dx \le J_n$

b/ Pour $n \ge 2$ on a $\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} (g(x))^n dx \le \int_0^{\alpha} (g(x))^n dx \le \dfrac{\alpha}{n+1}$

- $\dfrac{\alpha}{n+1} < 1$ (1)
- $\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} \left(g(x)\right)^n dx \ge \int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} \left(g(\alpha - \dfrac{1}{n})\right)^n dx$, car g est croissante et positive sur $\left[\alpha - \dfrac{1}{n}, \alpha\right]$. De plus on a $\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} \left(g(\alpha - \dfrac{1}{n})\right)^n dx = \dfrac{1}{n}\left(g(\alpha - \dfrac{1}{n})\right)^n$ (2)

Par suite d'après (1) et (2) on a : $\dfrac{1}{n}\left(g(\alpha - \dfrac{1}{n})\right)^n \le J_n \le 1$

c/ On a $\ln(\sqrt[n]{n}) = \ln n^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\ln n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha - \dfrac{1}{n}) = \alpha$ et g est continue en α alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g(\alpha - \dfrac{1}{n}) = g(\alpha) = 1$

On a d'après 2) b/ $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}\left(g(\alpha - \dfrac{1}{n})\right) \le \sqrt[n]{J_n} \le 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}\left(g(\alpha - \dfrac{1}{n})\right) = 1$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{J_n} = 1$