**MATHÉMATIQUES**
**Section : Economie et Gestion**
**Session principale 2021**

**<u>Exercice N°1 :</u>**

1) a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 32 & 21 & 12 \\ 20 & 7 & 12 \\ 12 & 21 & 9 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 21 & 9 \end{vmatrix} - 20\begin{vmatrix} 21 & 12 \\ 21 & 9 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 21 & 12 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$

$= 32(63 - 252) - 20(189 - 252) + 12(252 - 84) = 2772$

$\det(A) \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

b) $A \times B = \begin{pmatrix} 32 & 21 & 12 \\ 20 & 7 & 12 \\ 12 & 21 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 189 & -63 & -168 \\ 36 & -144 & 144 \\ -336 & 420 & 196 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2772 & 0 & 0 \\ 0 & 2772 & 0 \\ 0 & 0 & 2772 \end{pmatrix} = 2772 I_3$

On a : $A \times B = 2772 I_3 \iff A \times \frac{1}{2772} B = I_3$, donc $A^{-1} = \frac{1}{2772} B$.

2) a) On a :

$(S) \iff \begin{pmatrix} 32 & 21 & 12 \\ 20 & 7 & 12 \\ 12 & 21 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3500 \\ 2180 \\ 2460 \end{pmatrix}$

$\iff A \times X = C$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3500 \\ 2180 \\ 2460 \end{pmatrix}$

b) $A \times X = C \iff X = A^{-1} \times C \iff X = \frac{1}{2772} B \times C$

$\iff X = \frac{1}{2772}\begin{pmatrix} 189 & -63 & -168 \\ 36 & -144 & 144 \\ -336 & 420 & 196 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3500 \\ 2180 \\ 2460 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$

**Conclusion :** $S_{\mathbb{R}^3} = \{(10, 60, 80)\}$

3) On note x, y et z les prix respectifs avant réduction d'une chemise, d'un pantalon et d'un pull.

Pour le client $C_1$:

$4x \times 0{,}8 + 3y \times 0{,}7 + 2z \times 0{,}6 = 350 \iff 10(3{,}2\,x + 2{,}1\,y + 1{,}2\,z) = 350 \times 10 \iff 32\,x + 21\,y + 12\,z = 3500$

Pour le client $C_2$:

$5x \times 0{,}8 + 2y \times 0{,}7 + 4z \times 0{,}6 = 436 \iff 5(4\,x + 1{,}4\,y + 2{,}4\,z) = 436 \times 5 \iff 20\,x + 7\,y + 12\,z = 2180$

Pour le client $C_3$:

$(5x \times 0{,}8) \times 0{,}9 + (10y \times 0{,}7) \times 0{,}9 + (5z \times 0{,}6) \times 0{,}9 = 436 \iff 3{,}6\,x + 6{,}3\,y + 2{,}7\,z = 738$

$\iff 36\,x + 63\,y + 27\,z = 7380 \iff \frac{1}{3} \times (36\,x + 63\,y + 27\,z) = 7380 \times \frac{1}{3}$
$\iff 12\,x + 21\,y + 9\,z = 2460$

Donc la situation se traduit par le système $(S)$: $\begin{cases} 32\,x + 21\,y + 12\,z = 3500 \\ 20\,x + 7\,y + 12\,z = 2180 \\ 12\,x + 21\,y + 9\,z = 2460 \end{cases}$

Et par suite on aura $x = 40$ ; $y = 60$ et $z = 80$

**Exercice N°2 :**

1) a)

| Sommet | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |

b) Le sous graphe $\{B, C, D\}$ est un sous graphe complet d'ordre 3.

c) Le nombre minimal des couleurs est le nombre chromatique du graphe $(G)$ .

Notons $\gamma(G)$ le nombre chromatique du graphe $(G)$. On a :

D'une part, le plus haut des degrés des sommets est 3, alors $\gamma(G) \leq 3 + 1 \iff \gamma(G) \leq 4$

D'autre part, $\{B, C, D\}$ est un sous graphe complet d'ordre 3, d'où $\gamma(G) \geq 3$
Par suite on a : $3 \leq \gamma(G) \leq 4$

| Sommet | B | D | A | C | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| Couleur | $c_1$ | $c_2$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_1$ |

On peut donc illuminer les 5 appareils par des ampoules de 3 couleurs différentes. D'où $\gamma(G) = 3$ .

2) Parcourir toutes les allées de ce manège sans passer deux fois par la même allée signifier que le graphe $(G)$ comporte une chaine eulérienne.

La chaine A-B-C-D-E contient tous les sommets du graphe $(G)$, donc $(G)$ est connexe. De plus deux sommets exactement (B et D) sont de degré impair donc le graphe $(G)$ admet une chaine eulérienne.

**Conclusion :** Il est possible de parcourir toutes les allées de ce manège sans passer par la même allée.

3) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) a) Le nombre de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet

D au sommet B est le terme situé à l'intersection de la ligne 5 et la colonne 2 ($a_{52}$) de la matrice $M^5$.

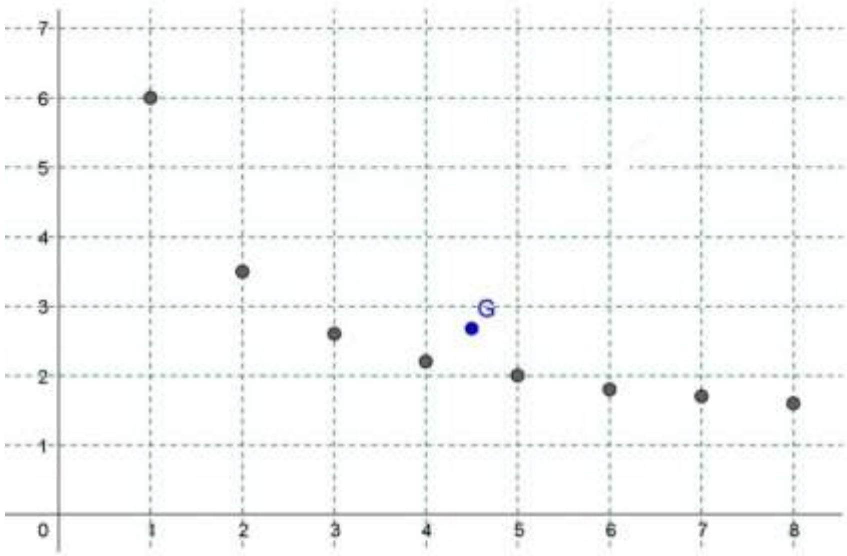
On remarque qu'il exactement 5 chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B qui sont :$D \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow B$/
$D \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow B$/ $D \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow B$/
$D \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow B$ et $D \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow B$

b) La somme des termes de diagonale de la matrice $M^5$ est :

$1 + 5 + 6 + 6 + 2 = 20$, donc il y a 20 chaines fermées de longueur 5
**Exemples :** $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow A$.

__Exercice N°3 :__

1) a )



b) Le nuage ne permet pas d'envisager un ajustement affine car les points ne sont pas allongés autour d'une droite

c) $\overline{X} = \frac{1}{8}\sum x_i = 4{,}5$ , $\overline{Y} = \frac{1}{8}\sum y_i = 2{,}675$ , donc $G(4{,}5\,;2{,}675)$

2) $r_1 = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \cong -0{,}836$

II)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $t_i$ | 5 | 2,5 | 1,667 | 1,25 | 1 | 0,833 | 0,714 | 0,625 |
| $y_i$ | 6 | 3,5 | 2,6 | 2,2 | 2 | 1,8 | 1,7 | 1,6 |

2) a) $r_2 = \frac{Cov(T,Y)}{\sigma(T)\sigma(Y)} \cong 1$

b) $D : y = a\,t + b$ , avec : $a = \frac{Cov(T,Y)}{V(T)} = 1{,}006$ et $= \overline{Y} - a\,\overline{T} = 0{,}966$ ,

Donc $D : y = 1{,}006\,t + 0{,}966$

c) Pour l'année 2022 on a : $x = 11$ donc $t = \frac{5}{11} = 0{,}455$ par suite

$y = 1{,}006 \times 0{,}455 + 0{,}966 = 1{,}423$

Donc les dépenses estimées en 2022 seront 1423 DT.

**Exercice N°4 :**

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x - e^{x-2}) = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0$)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x - e^{x-2} - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0$

Donc la droite $(\Delta): y = x$ est une asymptote à $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$

c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}; f(x) - y = -\,e^{x-2} < 0$ donc la courbe $(C_f)$ est au dessous de la droite $(\Delta)$.

2 ) a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}\,; x\left(1 - \frac{e^x}{x} \times e^{-2}\right) = x - e^x \times e^{-2} = x - e^{x-2} = f(x)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}\,; f(x) = x\left(1 - \frac{e^x}{x} \times e^{-2}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x} \times e^{-2}\right) = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{e^x}{x} = -\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{e^x}{x} \times e^{-2} = -\infty$ , donc la courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\,;\ f'(x) = 1 - e^{x-2}$.

On a :

$1 - e^{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow x - 2 \leq \ln 1 \Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Tableau de variation de f :

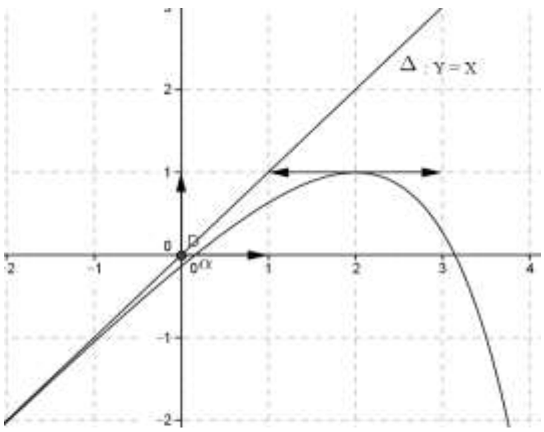
| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| f | $-\infty$ | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | $-\infty$ |

b)

- Sur $]-\infty, 2]$, $f$ est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $f(]-\infty, 2]) = ]-\infty, 1]$ et comme $0 \in ]-\infty, 1]$ alors il existe un unique $\alpha \in ]-\infty, 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- Sur : $[2, +\infty[$, $f$ est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur $f([2, +\infty[) = ]-\infty, 1]$ et comme $0 \in ]-\infty, 1]$ alors il existe un unique $\beta \in [2, +\infty[$ tel $f(\beta) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions $\alpha$ et $\beta$

c)




4) a) Le nombre de composantes produites par jour pour que le gain soit maximal est ( la valeur de x pour que f(x) soit maximal ) x100 qui est 2x100 = 200

Le gain est $f(2)\times 1000 = (2 - e^{2-2})\times 1000 = 1000$ Dinars.

b) L'entreprise réalise un gain pour $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow x \in [0,16 ; 3,15]$

Donc le nombre de composantes doit appartenir à [0,16 ; 3,15]