



## Enoncé

### EXERCICE N° 1 (6 points)

Une urne contient neuf jetons indiscernables au toucher dont cinq numérotés 1, 1, 1, 3, 3 et quatre noirs portant le chiffre 2.

Une épreuve consiste à tirer simultanément deux jetons de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivant :  
A : " les jetons tirés sont de couleurs différentes".  
B : "Les jetons tirés sont rouges".  
C : "Les jetons tirés sont rouges et portent le même chiffre".  
D : "Les jetons tirés portent le même chiffre sachant qu'ils sont rouges".
- 2) Soit X l'aléa numérique prenant pour valeur la somme des chiffres marqués sur deux jetons tirés.  
a- Calculer la loi de probabilité de X.  
b- Calculer l'espérance mathématique de X.
- 3) Une opération consiste à répéter l'épreuve quatre fois de suite en remettant à chaque fois les deux jetons tirés dans l'urne. Soit Y l'aléa numérique prenant pour valeur le nombre de fois où les deux jetons sont de couleurs différentes. Déterminer la loi de probabilité de Y.

### EXERCICE N° 2 (6 points)

$$\text{Soit } (u_n) \text{ une suite définie sur } \mathbf{N} \text{ par : } \begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et} \\ u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n}{2 + u_n} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  ;  $0 \leq u_n < 2$ .
- 2) Montrer que  $(u_n)$  est une suite croissante sur  $\mathbf{IN}$  et qu'elle est convergente.
- 3) Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbf{IN}$  par :  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ 
  - a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
  - b- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ , et en déduire le terme général de la suite  $(u_n)$   $n \in \mathbf{N}^*$  en fonction de  $n$ .
  - c- Déterminer la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### PROBLEME (8 points)

- 1) Soit la fonction  $\varphi$  définie sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  par :  $\varphi(x) = \frac{x}{x-1} + \text{Log}(x-1)$ .

Etudier les variations de la fonction  $\varphi$  et en déduire que l'on a  $\varphi(x) > 0$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]1, +\infty[$ .

- 2) Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  par :  $f(x) = x \text{Log}(x-1)$ .

On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

- a- Etudier les variations de la fonction  $f$ .
  - b- Montrer que le point I (2, 0) est un point d'inflexion pour la courbe (C) et écrire une équation cartésienne de la tangente à (C) au point I.
  - c- Déterminer l'intersection de (C) avec la droite D d'équation  $y = x$ .
  - d- Tracer la courbe (C).
- 3) a- Montrer que  $f$  est une bijection de l'intervalle  $]1, +\infty[$  sur  $\mathbf{IR}$ .  
b- Soit  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$  ; étudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  et calculer  $(f^{-1})'(e+1)$ .  
c- Tracer, dans le même repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe (C') représentative de  $f^{-1}$ .

- 4) a- Vérifier que pour tout  $x$  de l'intervalle  $]1, +\infty[$  on a :  $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$
- b- En utilisant le résultat précédent et en faisant une intégration par parties, calculer l'aire  $A$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$  et les droites d'équation  $x = 2$  et  $y = x$ .
- c- En déduire l'aire  $A'$  de la partie du plan limitée par les courbes  $(C)$  et  $(C')$  et les droites d'équations  $x=0$  et  $y=0$ .