Corrigé du Problème

I) De quoi s'agit-il ?

Etude d'une fonction "raccord"
Continuité en un point. Dérivabilité en un point. Bijection réciproque.
Calcul d'aire et intégrale

II) Indications et commentaires

1°) a) Continuité de f au point $x_0=1$

Remarquer que f est définie à gauche de 1 par $f(x)=(x-1)\log(1-x)$ et à droite de 1 par $f(x)=(x-1)e^x$ et que $f(1)=0$.
Pour étudier la continuité de f au point 1, il est donc nécessaire d'étudier la continuité de f à droite et à gauche de1.

- Montrer que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

  $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ (se rappeler que $\lim_{u\to 0^+} u\,Log\,u = 0$)
- Conclure que f est continue au point $x_0 = 1$.
- Pourquoi peut-on prévoir la continuité à droite de f au point $x_0 = 1$?

b) Dérivabilité de f au point $x_0 = 1$

- Montrer que $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = e$. Conclure que f est dérivable à droite en $x_0 = 1$.
- Montrer que $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$.Conclure que f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$.

Interprétation graphique :
La représentation graphique de f admet au point $M_0(1,0)$ deux demi-tangentes, l'une de coefficient directeur e, l'autre parallèle à l'axe des ordonnées et dirigée vers "Le haut". Le point M_0 est un point anguleux.

En général

- Si f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en x_0, la courbe représentative de f admet en $M_0(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ (respectivement $f_g(x_0)$). Cette demi-tangente en M_0 à pour équation :

$$\begin{cases} y - f(x_0) = f'_d(x_0)(x-x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases} \left(respect \begin{cases} y - f(x_0) = f'_g(x_0)(x-x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases} \right)$$

- Si $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ alors la courbe de f admet, au point $M_0(x_0,f(x_0))$ une demi-tangente d'équations $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$
- Revoir les interprétations graphiques des cas :

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \; ; \; \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$$

Remarque

Attention : pour étudier la dérivabilité d'une fonction f au point x_0 (respectivement la dérivabilité à droite ; ou à gauche) <u>il faut</u> revenir à la définition.

La méthode qui consiste à étudier la limite de la fonction dérivée (respectivement à droite, ou à gauche) au point considéré, ne fournit qu'une condition suffisante et elle est <u>hors programme.</u>

2°) a) Etude des variations de *f*

- La dérivabilité de *f* au point $x_0=1$, a été étudiée à la première question.
- Montrer que *f* est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que sa fonction dérivée *f* ' est définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + Log(1-x) & si\ x < 1 \\ xe^{x} & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

- Voir que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Déduire le tableau de variation de *f* suivant :

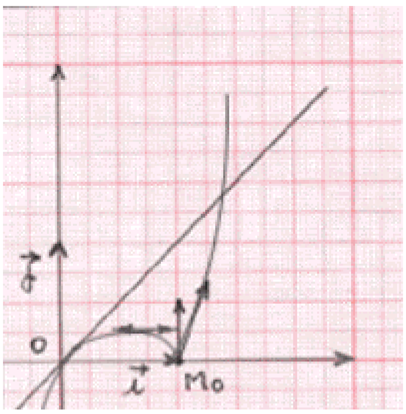
x	$-\infty$		$1-\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	—	||	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

Remarques :

- Quand on demande d'étudier les variations de *f* , on dresse la tableau de variation avec les limites éventuelles, par contre quand on demande d'étudier le sens de variation, il suffit de voir la monotonie de *f* (sans étude nécessaire des limites).
- L'étude des variations d'une fonction dérivable se ramène à la recherche des intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant.

b) Traçage de la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

- N'oublier pas d'étudier les branches infinies
  Une <u>branche infinie</u> de la courbe ( ) représentative d'une fonction *f* apparaît dés que l'une au moins des deux cordonnées x et y d'un point de ( ) <u>tend vers l'infini .</u>
- Montrer que ( ) admet au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- Remarquer que *f* (0) = 0 (La courbe ( ) passe par l'origine du repère) et que *f* ' (0) = 1 (La courbe ( ) admet à l'origine la première bissectrice d'équation y= x, comme tangente).



3°) a) g réalise une bijection de I = [1, + ∞[vers J = [0, + ¥ [

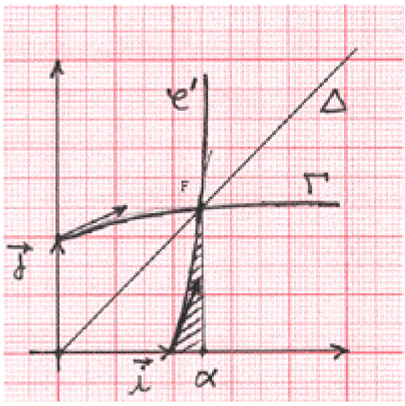
Remarquer que g est continue et strictement croissante sur I = [1, + ∞[et déduire qu'elle réalise une bijection de I sur g(I)= J= [0, + ∞[.

b) Traçage de la courbe (G) représentative de g^{-1} dans le même repère que (𝒞).

La courbe (Γ) se déduit de la courbe (') par la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation y = x (première bissectrice)

(') étant la représentation graphique de g.

voir que g est la restriction de *f* à l'intervalle I=[1,+∞[



4°) a) Calcul de l'aire A(a) de la partie du plan limitée par (𝒞), et les droites d'équations y = 0 , x = 1 et x = a

Remarquer que ( ) et (Γ) se coupent sur (Δ) (pourquoi ?)

On cherche l'aire A (α) du domaine hachurée (voir figure 3°)b))

- Voir que A(α) = $\int_1^a (x-1)e^x dx$ ua (unités d'aires)
- Faire une intégration par parties en posant U(x) = x – 1 et $V'(x) = e^x$. On obtient $A(\alpha)=[(\alpha-2)e^{\alpha}+e]$ u.a (unités d'aires)
- La partie D du plan limitée par ( ), et les droites d'équations y = 0 , x = 1 et x = α, peut être décrit, comme l'ensemble des points M (x , y) tels que $\begin{cases} 1 \le x \le a \\ 0 \le y \le g(x) \end{cases}$

  D = $\left\{ M(x,y) / \begin{cases} 1 \le x \le a \\ 0 \le y \le g(x) \end{cases} \right\}$
- La mesure de l'aire A(α) est $(\alpha - 2)\, e^{\alpha} + 2$ (sans unités d'aires)

b) Calcul de l'intégrale I = $\int_0^{\alpha} g^{-1}(x)\,dx$ **en fonction de** a

- Considérer les points E(α,0), F(α,α) et G(0, α). OEFG est alors un carré d'aire α^2
- Expliquer, par raison de symétrie, que $I=\alpha^2-A'(\alpha)$ où $A'(\alpha)=(\alpha-2)e^{\alpha}+2$
- Conclure que : $I=\alpha^2-e+(2-\alpha)e^{\alpha}$

Remarquer qu'on n'a pas l'expression de $g^{-1}(x)$ et cependant on a pu calculer $\int_0^{\alpha} g^{-1}(x)\,dx$