Corrigé de l'exercice 1

I) De quoi s'agit-il ?

Probabilités usuelles : cas d'équiprobabilité
Variables aléatoires : Loi de probabilité - Espérance mathématique

II) Indications et commentaires

1°) Détermination de la probabilité de chacun des évènements A_1, A_2 etA_3
* Commencer par définir l'univers dans lequel vous allez travailler.
* Repérer dans les énoncés la locution "indiscernables au toucher" qui signifie l'équiprobabilité" (le tirage est aussi au hasard)
* Noter que le tirage est simultané (utilisation de C_n^p)

i) Calcul de la probabilité de A_1
* Le nombre de cas favorables à la réalisation de A_1 est C_5^3 puisqu'il faut tirer les 3 ampoules parmi les 5 non défectueuses.
* Le nombre de tous les cas possibles de tirer 3 ampoules parmi les 9 ampules est C_9^3

$$\textit{Donc}\ \text{prob}(A_1) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}$$

Il n'est pas nécessaire de calculer à part, chacun des nombres C_5^3 et C_9^3. En remplaçant C_5^3 par $\frac{5!}{3!2!}$
et C_9^3 par $\frac{9!}{3!6!}$ dans $\text{prob}(A_1) = \frac{C_5^3}{C_9^3}$ une simplification apparait d'abord par 3! puis :

$$\text{prob}(A_1) = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{\frac{5!}{2!}}{\frac{9!}{6!}} = \frac{3\times4\times5}{7\times8\times9} = \frac{5}{42}$$ (une machine à caluler donne plus rapidement le résultat)

ii) Calcul de la probabilité de A_2

De même que pour A_1 , on calcule la probabilité de A_2 : $\text{Prob}(A_2) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_9^3} = \frac{10}{21}$

iii) Calcul de la probabilité de A_3
L'événement A_3 est défini à l'aide de la locution "au moins" et comme on l'a signalé avant, il est alors souvent plus simple de déterminer la probabilité de l'évènement contraire $\overline{A_3}$ et d'en déduire sa probabilité.

Et comme $\overline{A}_3 = A_1$ alors $\text{Prob}(A_3) = 1 - \text{Prob}(A_1) = \frac{37}{42}$

2°) a) Détermination de la loi de probabilité de X
* Expliquer pourquoi on a $X(\Omega)=\{0, 1, 2, 3\}$
$X(\Omega)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X.

* Expliquer chacun des évenements (X=i) ; $i \in X(\Omega)$
par exemple (X=0)=A_1 et (X=1)=A_2
* Expliquer la probabilité de chacun des évènements (X=i) ; $i \in X(\Omega)$
par exemple $\text{Prob}(X = 2) = \dfrac{C_4^2 \times C_5^1}{C_9^3} = \dfrac{5}{14}$ et $\text{Prob}(X = 3) = \dfrac{C_4^3}{C_9^3} = \dfrac{1}{21}$
* Se rappeler que : Déterminer la loi de probabilité de X, c'est chercher les valeurs x_i prises par X et calculer Prob(X=x_i)
On récapitule souvent le résultat sous forme d'un tableau. La loi de X est donnée, dans notre cas, par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
Prob(X=xi)	$\dfrac{5}{42}$	$\dfrac{10}{21}$	$\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{1}{21}$

Vérifier que $\sum_{i=0}^{3} \text{Prob}(X=i)=1$

Remarques :

- Il est souhaitable d'utiliser au maximum les possibilités de la calculatrice et d'effectuer des vérifications fréquentes.
- Les énoncés ne précisent pas, s'il faut donner les résultats sous forme décimale ou de fractions irréductibles; on a préféré donner les résultats sous forme de fractions irréductibles, cependant il faut toujours lire les énoncés jusqu'au bout pour savoir si les résultats doivent être donnés sous une forme exigée.

b) Calcul de l'espérance mathématique de X

L'espérance mathémathique de X est le réel :

$\text{E}(X) = \sum_{i} x_i \text{Prob}(X = x_i)$ on trouve dans notre cas $\text{E}(X) = \dfrac{4}{3}$

On vérifie bien que E(X) est compris entre les valeurs extrêmes prises par X : 0 < E(X) < 3
(N’oubliez pas de faire cette vérification)