Corrigé de l'exercice 2

I) De quoi s'agit-il ?

Résolution d'un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues réelles
Détermination des extremums d'une fonction polynôme de 4ème degré

II) Indications et commentaires

1°)<u>Résolution, dans IR^4, du système (S) :</u>

$$(S)\begin{cases} y+z+t+s=-\dfrac{13}{2}(1) \\ y+2z+3t+4s=0(2) \\ y+2z+4t+8s=-2(3) \\ y+4z+12t+32s=0(4) \end{cases}$$

Essayons d'exprimer les variables y, t et z en fonction de s
(3)-(2) nous donne : t + 4s = -2 c'est à dire t = -2 – 4s (a)
(2)-(1) nous donne : z +2t +3s = 13/2 soit en remplaçant t par -2- 4s on obtient z = 5s+ $\frac{21}{2}$ (b)
en remplaçant t et z, par leurs valeurs en fonction de s, dans (4) on trouve y = -4s - 18 (c)
finalement, en remplaçant t, z et y par leurs valeurs en fonction de s on obtient s = $\frac{-3}{2}$, qui en remplaçant dans (a),(b) et (c) nous donne t=4 ; z=3 et y=-12

d'où la solution unique : $\boxed{y = -12 \ ; \ z = 3 \ ; t = 4 \ \text{et} \ s = -3/2}$

Revoir dans le cours les méthodes de résolution d'un système. A noter qu'il n'y a pas de méthode priviligiée, c'est la simplicité des calculs à affectuer qui guide le choix de la méthode appropriée.

<u>2)a) Détermination de la fonction f vérifiant les conditions imposées par les énoncés.</u>
Les énoncés se traduisent par le système (S'):

$$(S')\begin{cases} f(1)=-\dfrac{13}{2} & (C)\, passe\ par\ A \Leftrightarrow f(1)=\dfrac{-13}{2} \\ f'(1)=0 & (C)\, admet \text{ en A une tangente de vecteur directeur } \overrightarrow{i} \Leftrightarrow f'(1)=0 \\ f(2)=-4 & \\ f'(2)=0 & \end{cases}$$

Remarquer que (S') n'est autre que le système (S) de la première question avec :

$y=a\,;z=b\,;t=c\ et\ s=d$

ainsi, $f(x)=-12x+3x^2+4x^3-\dfrac{3}{2}x^4$

b) <u>Détermination des extréma de f</u>

- Montrer que f'(x) = $-6(x^3-2x^2-x+2)$
- Ne pas oublier que f'(1)=f'(2)=0 (1ère question !) ; par suite, on peut factoriser f'(x) par (x-1)(x-2) , on obtient f'(x)=-6(x-1)(x-2)(x+1)
- Conclure en étudiant le signe de f'(x), que f a trois extremums relatifs aux points d’abscisses respectives :

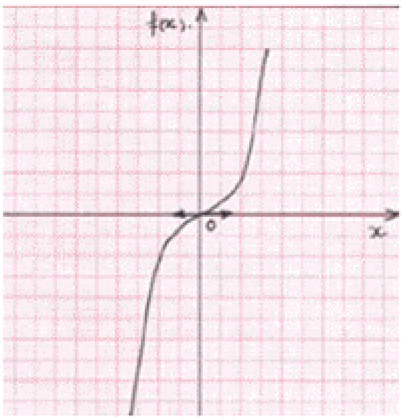
  -1, 1 et 2 et que ses extremums sont alors $f(-1)=\frac{19}{2}\,;f(1)=-\frac{13}{2}\,;f(2)=-4$

Remarque :
Ne pas faire le calcul pour f(1) et f(2) : les énoncés donnent ces valeurs.

A propos des extremums
Il ne faut pas se contenter de déterminer les points où la dérivée s'annule (les zéros de la dérivée) pour conclure qu'en ces points la fonction admet un extremum, il faut toujours voir le sens de variation de la fonction :

- Un zéro de la dérivée ne correspond pas nécessairement à un extremum. C'est ainsi que pour $f(x)=x^3$, la dérivée ($f'(x) = 3x^2$) s'annule en 0 et cependant f ne présente pas un extremum en 0 (f(x) = 0 pour x = 0 et f(x) = 0 pour x = 0).

$f'(0)=0$, f ne présente pas un extremum.



- En cas d'extremum, seules les variations de la fonction permettent de décider s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
- A retenir : Pour justifier un extremum, bien préciser le changement de signe de f', ce qui permet aussi de distinguer un maximum d'un minimum.