Enoncé

EXERCICE N° 1 (6 points)

Soit (Un) la suite réelle définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

1) a- Calculer U_1 et U_2

   b- Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n>1$

   c- Montrer que, la suite (Un) est strictement croissante.

2) Soit (V_n) la suite réelle définie sur IN par : $V_n=U_n-1$

   a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

   b- Calculer V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n.

3) a- Calculer $S_n=V_0+V_1+\dots V_{n-1}$ en fonction de n.

   b- Déterminer la plus petite valeur no de n pour que S_n soit supérieure ou égale à 1000.

EXERCICE N°2 (6 points)

1) Ecrire, sous forme algébrique, chacun des nombres complexes suivants :

   $(1+i)^2$; $(2-i)^2$

2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $Z^2-2(2+i)z+8i=0$

3) En déduire, les solutions dans , de l'équation (E) : (E) : $z^4-2(2+i)z^2+8i=0$

4) Ecrire sous forme exponentielle les solutions de l'équation (E).

PROBLEME (8 points)

I) - Soit f la fonction numérique définie sur [0,+∞ [par :

$$\begin{cases} f(x) = x\mathrm{Log}x + 1 - x & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) a- Montrer que f est continue à droite en 0

   b- f est elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter géométriquement le résultat.

   c- Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (*C*) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) a- Calculer, à l'aide d'une intégration par partie, l'intégrale : $I = \int_1^2 x\mathrm{Log}x\,dx$

   b- On désigne par A la mesure de l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=2. Calculer A.

II) Soit g la fonction numérique définie sur]0,+∞ [par : $g(x)=e^x(\mathrm{Log}x-1)$

On désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(A, \vec{u}, \vec{v})$

1) a- Montrer que, pour tout réel strictement positif x, on a : $g'(x) = \dfrac{e^x}{x} f(x)$

(g' étant la fonction dérivée de g)

b- Déterminer l'abscisse du point E d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec l'axe des abscisses.

c- Ecrire l'équation de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point U d'abscisse 1.

2) a- Etudier les variations de la fonction g.

b- Tracer (T) et ($\mathscr{C}$).

3) a- Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR. On note h l'application réciproque de g.

b- Donner le sens de variation de h.

c- Calculer h(0) et h'(0).

4) Représenter graphiquement h dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$.