



Corrigé de l'exercice 1

I) De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes :

- Ecriture algébrique.
- Résolution d'équations du second et du troisième degré.
- Application géométrique.

II) Indications et commentaires

1) a) Ecriture sous forme algébrique du nombre $(1-i)^2$

- Montrer que $(1-i)^2 = -2i$ en utilisant l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et en se rappelant que $i^2 = -1$.
- **Attention** : une écriture sous la forme $x+iy$ n'est la forme algébrique d'un nombre complexe que si x et y sont réels.

b) Résolution dans \mathbb{C} de l'équation : $Z^2 - 3(1+i)Z + 5i = 0$

- Montrer que $\Delta = -2i$
- Utiliser la question a) pour conclure que les solutions sont $2+i$ et $1+2i$.

Remarque : on peut vérifier l'exactitude des calculs, en se rappelant que la somme S et le produit P des racines de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ sont donnés par

$$S = -\frac{b}{a} \text{ et } P = \frac{c}{a}$$

$$\text{on a bien } (2+i) + (1+2i) = 3(1+i) = -\frac{b}{a}$$

$$(2+i)(1+2i) = 5i = \frac{c}{a}$$

2) Résolution dans \mathbb{C} de l'équation (E) : $Z^3 - 4(1+i)Z^2 + 11iZ + 5(1-i)$

a) Vérification que $(1+i)$ est une solution de (E)

Soit $P(Z) = Z^3 - 4(1+i)Z^2 + 11iZ + 5(1-i)$

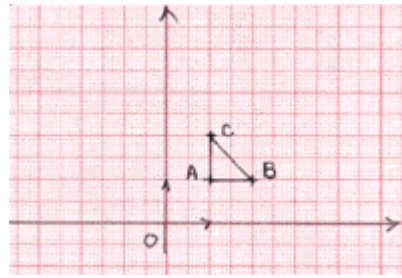
Montrer que $P(1+i) = 0$ (en utilisant les produits remarquables $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

b) Résolution dans \mathbb{C} de l'équation (E)

- Remarquer que $(E) \Leftrightarrow P(Z) = 0$.
- Il s'agit de la résolution d'une équation du 3^{ème} degré dans \mathbb{C} et l'on sait que toute équation du 3^{ème} degré admet dans \mathbb{C} trois solutions (distinctes ou non).
- La question a) indique que $z_0 = 1+i$ est une solution particulière de (E).
- Dédire que $P(Z)$ est factorisable par $Z - (1+i)$.
- Montrer alors l'équivalence $(E) \Leftrightarrow [Z - (1+i)][Z^2 - 3(1+i)Z + 5i] = 0$.
- Voir le lien avec la première question : on retrouve dans la factorisation de $P(Z)$, l'équation donnée dans b) de la première question.
- Dédire que l'ensemble S des solutions de E est $S = \{1+i, 2+i, 1+2i\}$.

3) a) Plaçons les points A, B et C

Se rappeler que si x et y sont réels, le point d'affixe $z=x+iy$ n'est autre que le point de coordonnées (x,y) .



b) Le triangle ABC est rectangle isocèle

- La figure permet de constater que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.
- Se rappeler que la distance MN entre deux points du plan d'affixes z_M et z_N et $MN=|z_N-z_M|$
- Vérifier que $AB=AC$ et $BC^2=AB^2+AC^2$
- Conclure d'après la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

Remarque :

- On peut se rappeler que deux vecteurs non nuls $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé sont orthogonaux si $xx'+yy'=0$ et montrer alors que \vec{AB} et \vec{AC} sont orthogonaux (l'affixe d'un vecteur \vec{MN} est z_N-z_M).