Corrigé de l'exercice 1

I) De quoi s'agit-il ?

Résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues réelles.
Résolution dans $\mathbb{C}$, d'une équation du 3ème degré.

II) Indications et commentaires

1°) **résolution dans IR^3 du système (S)**

$$(S)\ \begin{cases} 8x+6y+z=0 & (1) \\ 2x+z=0 & (2) \\ x-z=3 & (3) \end{cases}$$

Remarquer que les deux équations (2) et (3) ne dépendent pas de y et donnent facilement x=1 et z=-2

Déduire par la suite la valeur de y en remplaçant les valeurs trouvées de x et z dans (1). On obtient y=-1.

Pour la résolution d'un système, il n'y a pas de méthode préviligiée de résolution, c'est toujours la simplicité des calculs à effectuer qui guide le choix de la méthode appropriée.
Rappelons qu'un système peut être résolu :

- Par substitution
- Par combinaison linéaire
- Par la méthode de pivot de Gauss.

2°) Détermination des réels a, b et c

Se rappeler que deux nombres complexes écrits sous formes algébriques sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
Autrement dit : si a, b, a' et b' sont réels alors :

(a + bi = a' + b'i) ⇔ (a = a' et b =b').

- Montrer que le système $\begin{cases} f(2)=0 \\ f(-1)=-3+3i \end{cases}$ est équivalent au système (S) de la première question où a,b et c jouent les rôles respectifs de x, y et z.
- Déduire les valeurs de a, b et c.
  On trouve a=1, b=-1 et c=-2 c'est à dire que f(z)= $z^3 - z^2-(1+i)z-2(1-i)$

3°) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : (E) : $Z^3-Z^2-(1+i)Z-2(1-i)=0$

- Voir le lien avec la deuxième question : l'équation proposée n'est autre que f(z)=0.
- L'égalité f(2)=0 indique que 2 est une solution particulière de l'équation proposé (E).
- L'équation (E) est une équation du 3ième degrés qui admet dans $\mathbb{C}$ trois racines (distinctes ou confondues) et puisque 2 et une solution particulière, on peut alors factoriser f(z) par (z – 2).

<u>Première méthode de factorisation :</u>

Déterminer les nombres complexes α et β et γ tels que pour tout z ∈ $\mathbb{C}$:

$z^3 - z^2 - (1 + i) z - 2 (1 - i) = (z - 2) (\alpha z^2 + \beta z +\gamma)$.

On trouvera α=1, β=1 et γ=1-i.

C'est à dire $z^3 - z^2 - (1 + i) z - 2 (1 - i) = (z - 2) (z^2 + z +1-i)$

<u>Deuxième méthode de factorisation :</u>

On a : f(z)= $z^3 - z^2 - (1 + i) z - 2 (1 - i)$

F(2)= $2^3 - 2^2 - (1 + i) 2 - 2 (1 - i)=0$.

Alors $f(z)=f(z)-f(2)$

C'est à dire $f(z)= (z^3 -2^3) – (z^2 –2^2) – (1+i)(z-2)$

Or $z^3 -2^3 = (z – 2) (z^2 – 2z + 4)$ et $z^2 –2^2 = (z – 2)(z + 2)$

On obtient : $z^3 - z^2 - (1 + i) z - 2 (1 - i) = (z – 2)(z^2 +z +1-i)$

$z^3 - z^2 - (1 + i) z - 2 (1 - i) = (z - 2) (\alpha z^2 + \beta z +\gamma)$.

On trouvera $\alpha=1$, $\beta=1$ et $\gamma=1-i$.

C'est à dire $z^3 - z^2 - (1 + i) z - 2 (1 - i)=(z - 2) (z^2 + z +1-i)$.

Montrer alors que l'équation donnée admet pour solutions : 2, i et -1-i.