Enoncé

EXERCICE N° 1 (6 points)

1) x, y et z étant des réels, résoudre le système

$$(S): \begin{cases} 8x + 6y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

2) Soit a, b et c des réels et f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :
$f(z) = az^3 + bz^2 + (b - ai)z + c(1 - i)$.
Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-1) = -3 + 3i \end{cases}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^3 - z^2 - (1 + i)z - 2(1 - i) = 0$.

EXERCICE N° 2 (6 points)

On pose $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}\,dx$,

et pour tout entier naturel n non nul,

$I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}\,dx$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) a- Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'on a pour tout entier naturel n
$$2\,I_{n+1} = (n+1)\,I_n - e^{-2}.$$
b- En déduire que $I_2 = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$.

c- On pose $J = \int_0^1 (5x^2 + x - 3)e^{-2x}\,dx$.

Donner la valeur de J.
3) a- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0, 1] et tout entier naturel n,
on a : $0 \le x^n e^{-2x} \le x^n$.

b- En déduire que pour tout entier naturel n, on a $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

c- Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBLEME (8 points)

I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x$
Etudier les variations de g.

II- On considère la fonction numérique f , définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) En utilisant la première question, montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
4) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
5) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

6) Dresser le tableau de variation de f.
7) Ecrire l'équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O, origine du repère.

8) Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$f(x) - x = x\left(\frac{1}{g(x)} - 1\right).$$

En déduire la position de la courbe (C) par rapport à Δ.

9) Tracer (C) et Δ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

III- Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty , 1]$.

1) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on détermine.
2) On désigne par h^{-1} la fonction réciproque de h et par (C') sa courbe représentative dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
Tracer (C').