Corrigé de l'exercice 1

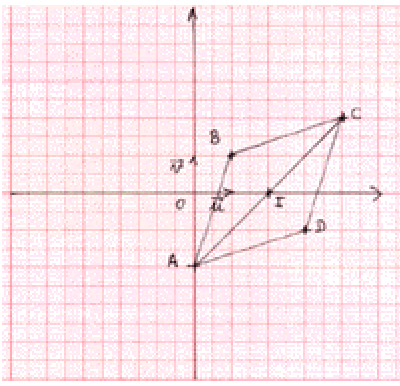
I) De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes :
- Affixes de vecteurs.
- Affixe du milieu, affixe du symétrique d'un point par rapport à un autre.
- Applications géométriques (configurations).
- Résolution d'équation du 3$^{\text{ème}}$ degré.

II) Indications et commentaires

1) a) Plaçons les points A, B, C et I

- Quelles sont les coordonnées des points A, B,C et I dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$?
-



b) I est le milieu de [AC]

- Se rappeler que l'affixe du milieu de [AC] est $\frac{z_A + z_C}{2}$
- Se rappeler aussi l'équivalence : $(Z_M=Z_N)\Leftrightarrow(M=N)$.
- Il suffit donc de vérifier que $Z_I = \frac{z_A + z_C}{2}$.

2) a) Affixes des vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$

- Se rappeler que l'affixe d'un vecteur $\vec{MN}$ est donné par $Z_{\vec{MN}}=Z_N-Z_M$
- On obtient : $u=Z_A-Z_B=-1-3i$ et $u'=Z_C - Z_B=3+i$
- Vérifier vos résultats sur la figure.

b) ABC est un triangle isocèle de sommet principal B

- Montrer que BA= BC en se rappelant que $BA=|Z_A-Z_B|$ et $BC=|Z_C-Z_B|$
- La figure confirme le résultat.

3) a) Affixe du point D symétrique de B par rapport à I

- Penser à l'équivalence :
  $(D = S_I(B)) \Leftrightarrow$ (I est le milieu de [BD]).
- Déduire que $Z_D = 2Z_I - Z_B$. soit $Z_D = 3 - i$
- La figure confirme l'exactitude du calcul.

b) Le quadrilatère ABCD est un losange

- Remarquer que le milieu I de [AC] est aussi le milieu de [BD].
- Conclure que ABCD est un parallélogramme.
- Utiliser 2°) b) pour conclure.

4) a) vérifier que (-2i) est solution de (E)

- Soit $P(Z) = Z^3 – (5+i)Z^2 + 4(2 – i)Z – 12 + 4i$
- vérifier que $P(- 2i) = 0$ en utilisant $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$

b) Détermination de a, b et c tels que, pour tout nombre complexe Z :
$Z^3 – (5+i)Z^2 + 4(2 – i)Z – 12 + 4i = (Z+2i)(aZ^2+bZ+c)$.

- On peut déterminer a, b et c :
  Première méthode : par identification
- Montrer alors que a,b et c sont solutions du système :

$$(S): \begin{cases} a=1 \\ 2ai+b=-5-i \\ 2bi+c=4(2-i) \\ 2ic=-12+4i \end{cases}$$

- Remarquer que (S) est un système de quatre équations à trois inconnues.
- Choisir alors les trois équations qui permettent de calculer le plus simplement possible les inconnues a,b et c et n'oublier pas de vérifier la quatrième équation.
  On trouve $a=1$, $b=-5-3i$ et $c=2+6i$.
  Deuxième méthode :
  On a : $P(Z) = Z^3–(5+i)Z^2+4(2–i)Z–12+4i$
  $P(-2i) = (-2i)^3–(5+i)(-2i)^2+4(2–i)(-2i)–12+4i=0$.
  Alors $P(Z) = P(Z)–P(-2i)$.
  Soit $P(Z) = [Z^3-(-2i)^3] – (5+i)[Z^2-(-2i)^2] + 4(2-i)(Z-(-2i))$
  En utilisant les produits remarquables $(a^3–b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ et $a^2–b^2 = (a–b)(a+b)$, montrer que $P(Z) = (Z+2i)(Z^2–(5+3i)Z+2+6i)$

c) Résolution de l'équation (E) : $Z^3 – (5+i)Z^2 + 4(2 – i)Z – 12 + 4i = 0$

- Expliquer Pourquoi a-t-on l'équivalence : (E) $\Leftrightarrow$ ($Z+2i=0$ ou $Z^2–(5+3i)Z+2+6i=0$).
- Pour la résolution de $Z^2–(5+3i)Z+2+6i=0$, montrer que $\Delta = (3+i)^2$
- Déduire que l'ensemble $S_{\mathbb{C}}$ des solutions de (E) est $S_{\mathbb{C}} = \{-2i, 4+2i, 1+i\}$.
- Remarquer que $S_{\mathbb{C}} = \{Z_A, Z_B, Z_C\}$.