Enoncé

EXERCICE N°1 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

1) a- Placer sur une figure les points A, B, C et I
   b- Vérifier que I est le milieu du segment [AC].

2) a- Calculer les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   b- Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle de sommet principal B.

3) Soit D le symétrique de B par rapport au point I.
   a- Déterminer l'affixe z_D du point D.
   b- Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

4) On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :
   $(E) : z^3 - (5 + i)z^2 + 4(2 - i)z - 12 + 4i = 0$
   a- Vérifier que $(-2i)$ est solution de cette équation .
   b- Déterminer les nombres complexes a, b, c tels que, pour tout nombre complexe z : $z^3 - (5 + i)z^2 + 4(2 - i)z - 12 + 4i = (z + 2i)(az^2 + bz + c)$
   c- Résoudre l'équation (E).

EXERCICE N°2 (6 points)

I- Une urne A contient 4 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher.
Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Montrer que la probabilité de l'événement E : " Les deux boules tirées ont la même couleur " est égale à $\frac{3}{7}$.

2) On recommence l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.
Soit X l'aléa numérique prenant pour valeur le nombre de fois où E est réalisé.
a- Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b- Calculer la probabilité que E soit réalisé exactement deux fois.

II- On dispose d'une deuxième urne B contenant 6 boules blanches et 4 boules noires.
On considère maintenant les deux urnes A et B.
On tire une boule de l'urne A et une boule de l'urne B. On suppose les tirages équiprobables.
Soit Y l'aléa numérique prenant pour valeur :
(– 1) si les deux boules tirées sont de couleurs différentes .
1 si les deux boules tirées sont blanches.
2 si les deux boules tirées sont noires.

1) a- Montrer que la probabilité de l'événement F : " Y = – 1 " est égale à $\frac{1}{2}$.
   b- Déterminer la loi de probabilité de Y.
2) Calculer l'espérance mathématique E(Y) et l'écart type $\sigma(Y)$.

PROBLEME (8 points)

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :
$$g(x) = x^2 + 2x + \text{Log}(x + 1)$$
2) Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
3) Dresser le tableau de variation de g.
4) Calculer g(0) . En déduire le signe de g(x) sur $]-1, +\infty[$.

5) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\text{Log}(x+1)}{x+1}-x$

et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (L'unité graphique étant 2 cm).

6) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

7) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$, on a : $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

8) Dresser le tableau de variation de f.

9) a- Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
   b- Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite (D).
   c- Tracer la courbe (C).

10) Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x)=[\text{Log}(x+1)]^2$.
   a- Calculer la dérivée de h. En déduire une primitive de f sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.
   b- Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=-1+\dfrac{1}{e}$ et $x=e-1$.