Corrigé de l'exercice 1

I) De quoi s'agit-il ?

Complexes : - Résolution d'une équation du 3ème degré dans ℂ.
- Nombres complexes et configurations géométriques.

I) Indications et Commentaires :

1°) a) Vérification que 2 est une solution de E

En posant $f(z) = 2z^3-(7+5i)\,z^2+(4+14i)z+4-8i$

Montrer que $f(2) = 0$

Conclure qu'on peut factoriser $f(z)$ par $z-2$

b) Détermination de a, b, g tels que pour tout z on ait :

$f(z) = (z-2)(a z^2+ bz+ g)$

<u>1er méthode : l'identification</u>

Elle repose sur le résultat suivant : si pour tout nombre complexe z on a : $az^3+bz^2+cz+d = a'z^3+b'z^2+c'z+d'$ alors a=a' ; b=b' ; c=c' et d=d'

En développant $(z-2)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)$ et en utilisant le résultat précédent, montrer que α, β et γ vérifient le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} a=2 \\ -2a-ß=7+5i \\ -2ß+?=4+14i \\ -2?=4-8i \end{cases}$$

C'est un système de 4 équations à trois inconnues.

Utiliser les trois équations (les plus simples) qui vous permettent de trouver α, β et γ et n'oublier pas de vérifier la quatrième équation ceci vous permettra de déceler des erreurs éventuelles dans le calcul (un moyen de vérification). On trouve $\alpha=2$, $\beta=-3-5i$ et $\gamma=-2+4i$

En général : dans un système où le nombre d'équations dépasse le nombre d'inconnues, prendre un nombre d'équations égal au nombre d'inconnues, ce qui vous permettra en général de trouver les inconnues (sinon de voir que le système est impossible). vérifier alors les autres équations ce qui vous permettra de conclure.

<u>2ème méthode : Par différence</u>

On a $f(z) = 2z^3-(7+5i)\,z^2+(4+14i)z+4-8i$

$f(2) = 2\times2^3-(7+5i)\,2^2+(4+14i)2+4-8i = 0$

$f(z) = f(z) – f(2) = 2[z^3 – 2^3] – (7+5i)(z^2 – 2^2) + (4+14i)(z – 2)$

- Se rappeler que $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$ et $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$
- Déduire que $f(z) = (z – 2)(2z^2 – (3 + 5i)z – 2 + 4i)$.

c) Résolution dans ℂ de l'équation (E)

- se rappeler l'équivalence dans ℂ : $(ab=0) \Leftrightarrow (a=0$ ou $b=0)$
- Déduire que (E) $\Leftrightarrow$ ($z=2$ ou $2z^2-(3+5i)z-2+4i=0$)
- L'équation $2z^2-(3+5i)z-2+4i=0$ est une équation du second degré dans ℂ, elle admet donc deux solutions (distinctes ou confondues).
- Voir que le discriminant ? = -2i s'écrit sous la forme d'un carré ? = $(1-i)^2$
- Se rappeler les formules donnant les solutions d'une équation du second degré $az^2+bz+c=0$ dans ℂ :

  $z=\frac{-b+d}{2a}$ ou $z=\frac{-b-d}{2a}$ avec δ une racine carrée de ? .
- Déduire que l'ensemble S des solutions de (E) est

$S=\left\{2\,;1+i\,;\frac{1+3i}{2}\right\}$

***A noter* :** Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes opposées et que si x+iy (x et y réels) est une racine carrée du nombre complexe $\alpha+i\beta$ (α et β réels) alors x et y sont solutions du système

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+ß^2} \\ x^2-y^2=a \\ 2xy=ß \end{cases}$$

2) a) Alignement des points A, B et C

- Montrer que $Z_C - Z_B = -\frac{1}{2}(Z_C - Z_A)$
- Déduire la relation vectorielle $\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et conclure que A, B et C sont alignés.

A noter : Comment démonter que trois points distincts deux à deux sont alignés, en utilisant les nombres complexes : (A, B et C alignés $\Leftrightarrow$ ($\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}$ est réel) $\Leftrightarrow$ ($\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ est réel)

b) Relation $Z'-Z_C = -\frac{1}{2}(Z - Z_C)$ et déduction que si M appartient à (AB) alors M' appartient à (AB)

- Un calcul simple montre que $Z'-Z_C = -\frac{1}{2}(Z - Z_C)$
- Traduire la relation précédente en relation vectorielle : $\overrightarrow{CM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$
- Voir que si M appartient à (AB) alors il existe un réel a tel que $\overrightarrow{CM}=a\overrightarrow{AB}$. Déduire alors que $\overrightarrow{CM'}=-\frac{1}{2}a\overrightarrow{AB}$
- Conclure que le point M' appartient aussi à (AB)