Enoncé

EXERCICE N°1

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : 2z^3 - (7+5i)z^2 + (4+14i)z + 4 - 8i = 0$$

a - Vérifier que 2 est une solution de l'équation (E) .

b - Déterminer les nombres complexes ? , ? et γ tels que pour tout nombre complexe z :

$$2z^3 - (7+5i)z^2 + (4+14i)z + 4 - 8i = (z-2)(?\,z^2 + ?\,z + ?) .$$

c - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2) Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \quad , \quad z_B = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{et} \quad z_C = 1 + i \ .$$

a - Montrer que les points A, B et C sont alignés .

b - A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2}(1+i) .$$

Montrer que $z' - z_C = -\frac{1}{2}(z - z_C)$.

En déduire que si M est un point de la droite (AB) alors M' est aussi un point de la droite (AB) .

EXERCICE N° 2 : (6 points)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : cinq boules noires numérotées 1, 1, 0, 0, 3 et trois boules blanches numérotées 1, 0, 3 .

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1) a - Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir trois boules de même couleur » .

B : « obtenir trois boules portant des numéros impairs » .

C : « obtenir au moins une boule blanche » .

b - Soit l'événement S : « la somme des numéros marqués sur les trois boules tirées est égale à 3 » .

Montrer que la probabilité pour que S soit réalisé est égale à $\frac{1}{8}$.

2) On répète l'épreuve précédente quatre fois de suite en remettant à chaque fois les trois boules tirées dans l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a - S est réalisé exactement trois fois .

b - S est réalisé pour la première fois au troisième tirage .

PROBLEME (8 points)

I - Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = 1 + (1 - x)\,e^{-x}$.

1) Etudier le sens de variation de g.

2) En déduire que pour tout réel x, on a : $g(x) > 0$.

II - On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 1 + x + x\,e^{-x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$) (l'unité graphique étant 1 cm).

1) a - Vérifier que pour tout réel x , on a : $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau de variation de la fonction f .

b - Soit I le point de la courbe (C) d'abscisse 2 . Montrer que I est un point d'inflexion pour la courbe (C) .

2) a - Montrer que la droite D d'équation : $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) lorsque x tend vers $+\infty$.

b - Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite D .

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans IR une solution unique ? . Vérifier que ? appartient à l'intervalle [- 1, 0] .

4) Tracer la courbe (C) (on prendra pour le graphique ? ≅ – 0,6).

5) a - Soit ? un réel strictement positif. En intégrant par parties, calculer $\int_0^{\lambda} x e^{-x}\,dx$.

b - Calculer l'aire A(?) de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite D et les droites d'équations respectives : x = 0 et x = ? ?

c - Déterminer la limite de A(?) lorsque ? tend vers $+\infty$.