Corrigé de l'exercice 1

I) De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes :

- Forme algébrique.
- Equations dans $\mathbb{C}$.
- Forme trigonométrique.

I) Indications et Commentaires :

1) a) Ecriture sous forme algébrique de $3(1+i)^2$

<u>Se rappeler</u> :

- La forme algébrique d'un nombre complexe est son écriture sous la forme x+y.i avec x et y réels.
- Le produit remarquable dans C : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $i^2 = -1$

On trouve $3(1+i)^2 = 6i$

<u>Attention</u> **:** L'écriture a+bi n'est la forme algébrique que si a et b sont réels.

b) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^2-(1-i)Z-2i=0$

- L'équation proposée est une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, qui admet toujours deux solutions (distinctes ou confondues).
- Le discriminant Δ de l'équation proposée est 6i, d'où le lien avec la première question a). Ecrire Δ sous la forme d'un carré $\left(? = \left[\sqrt{3}(1+i)\right]^2\right)$.
- Se rappeler les formules donnant les solutions d'une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$:
  $z = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ où δ et une racine carrée de Δ.
- N'oublier pas de noter z_1 la solution qui a une partie réelle négative et z_2 l'autre solution.

  On obtient $z_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i$

2) a) Développement de l'expression : $A = (z+1-i)(z^2-(1-i)z-2i)$

- Le développement donne : $(z+1-i)(z^2-(1-i)z-2i) = z^3-2-2i$

b) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : $z^3 = 2+2i$

- Voir le lien avec la question 2) a).
- Se rappeler l'équivalence dans $\mathbb{C}$: $(ab=0) \Leftrightarrow (a=0 \text{ ou } b=0)$.
- Déduire alors que $E \Leftrightarrow (z = -1+ i \text{ ou } z^2 -(1- i)z -2i =0)$.
- Se rappeler qu'on a déjà résolu l'équation :
  $z^2 -(1- i)z -2i =0$ à la première question b).
- Déduire que l'ensemble $S_{\mathbb{C}}$ des solutions de E est :

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{-1+i; \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i, \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

3) a) Vérification que les solutions de (E) sont z_0 ; jz_0 et j^2z_0

1 ère méthode :

- On a évidemment z_0= -1+ i est une solution de (E)d'après la question 2) b).
  C'est à dire $z_0^3 = 2 + 2i$.
- Vérifier que $j^3 = 1$et déduirez que jz_0 et j^2z_0 sont aussi solutions de E.

Remarques :

- j est une racine cubique de 1, c'est à dire que $j^3 = 1$; j vérifie aussi $j^2 = \bar{j}$ et $1+j + j^2 = 0$.
- L'équation 2) b) propose de chercher les racines cubiques de 2 + 2i et l'on sait que si z_0 est une racine cubique de 2 + 2i alors on obtient toutes les racines cubiques de 2 + 2i en la multipliant (z_0) par les racines cubiques de 1 : à savoir 1, j et j^2.
- Les images de z_0 , jz_0 et j^2z_0 dans le plan complexe sont les sommets d'un triangle équilatéral.

2ème méthode :

- On vérifie directement que $jz_0 = z_1$ et $j^2z_0 = z_2$.
- On note que z_0 est une solution de (E) et que (E) est une équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$ qui admet exactement trois solutions (distinctes ou confondues).

b) Ecriture sous forme trigonométrique de z_0 et j

- Se rappeler que le module d'un nombre complexe z = a + bi où a et b sont réels est défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et que pour $z \neq 0$, un argument θ de z est tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- On obtient $z_0 = \sqrt{2}[\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}]$ et $j = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

A noter :

Pour écrire sous forme trigonométrique, un nombre complexe non nul, donné sous forme algébrique, il faut calculer son module et le mettre en facteur, ce qui fait apparaître un nombre complexe de module 1 s'écrivant sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$, où θ est en général une valeur remarquable désignant un argument de ce nombre complexe.

c) Forme trigonométrique de z_1 et z_2

- On a $z_1 = jz_0$ et $z_2 = jz_1$
- Se rappeler que si z et z' sont deux nombres complexes alors |zz'|=|z||z'| et si de plus z et z' sont non nuls alors Arg(zz')=Arg(z)+Arg(z')[2π].
- On obtient : $z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{17p}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{17p}{12}\right)\right]$ et $z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{p}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{p}{12}\right)\right]$.