REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ******* **EXAMEN** **DU BACCALAUREAT** **SESSION DE CONTROLE**	**SECTION** **ECONOMIE ET GESTION** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **Durée : 3 heures** **Coef. : 2**

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit la suite (u_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_o = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

1) a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = - \dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n}$

c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

2) On considère la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = 3 + \dfrac{1}{u_n - 1}$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 3 + \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ puis calculer $v_{n+1} - v_n$.

b) En déduire que la suite (v_n) est arithmétique de raison égale à 1 ; préciser son premier terme v_o.

c) Exprimer v_n en fonction de n.

d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 2 : (6 points)

1) Résoudre, dans IR^3, le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 21 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

2) Une urne contient dix boules indiscernables au toucher dont :

n sont numérotées 1
p sont numérotées 2
q sont numérotées 3

On suppose que :

- le nombre des boules numérotées 2 est égal au nombre total des boules numérotées 1 et des boules numérotées 3

et

- la somme des numéros marqués sur toutes les boules de l'urne est égale à 21.

Déterminer n, p et q.

3) On suppose que l'urne contient deux boules numérotées 1, cinq boules numérotées 2 et trois boules numérotées 3.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
a) Déterminer la probabilité de l'événement :
A : «La somme des numéros marqués sur les boules tirées est égale à 4».
b) Soit X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de boules numérotées 3 tirées.
Déterminer la loi de probabilité de X ; calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLÈME : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \text{Log}\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

On désigne par (c) la courbe représentative de f dans un repère orthonomé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité graphique étant 1 cm).

1) a) Calculer : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b) Montrer que pour tout x de $]1, +\infty[$; on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x(x-1)}$.
c) Dresser le tableau de variation de f.
2) a) Préciser les asymptotes à la courbe (c).
b) Tracer (c).
3) a) Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]\text{Log } 2, +\infty[$.
b) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.
Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour x élément de $]\text{Log } 2, +\infty[$.
4) a) Vérifier que la fonction F définie sur $]1, +\infty[$ par :
$$F(x) = x\,\text{Log}(2x) - (x-1)\,\text{Log}(x-1)$$
est une primitive de f sur $]1, +\infty[$.
b) Soit α un réel de l'intervalle $]1, 2[$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (c) et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} A(\alpha)$.