Corrigé de l'exercice 1

I) De quoi s'agit-il ?

Déplacement - Antidéplacement - Similitude directe

II) Indication et commentaire

1°)a) Existence et unicité d'un déplacement f qui transforme A en C et B en D

Pour prouver l'existence et l'unicité d'un tel déplacement, il suffit de vérifier que A≠B et AB=CD.

Se rappeler q'un déplacement est une isométrie donc il est nécessaire de vérifier la condition AB=CD.

Remarquer que si AB=0 alors on a A=B et C=D et dans ce cas, il existe une infinité de déplacements f qui transforment A en C (c'est à dire B en D). Et par suite la condition AB≠0 est nécessaire pour pouvoir conclure l'unicité du déplacement

Caractéristiques de f

f transforme A en C et B en D donc l'angle de f est $\left(\vec{AB}, \vec{CD}\right)$ Donner une mesure de cet angle.

En déduire que f est une symétrie centrale. Quel est son centre ?

Remarquer que :

Si f est un déplacement qui transforme A en A' et B en B' tel que $\left(\begin{array}{l}\vec{A'B'} = -\vec{AB} \\ AB \neq 0\end{array}\right)$ *alors f est une symétrie centrale*

Le centre de f est le milieu du segment [AA'] ou [BB'].

Réponse $f=S_O$

b) Détermination de (gof)(C) et (gof)(D)

Vérifier que f(C)=A puis g(f(C))=C

f(D)=B puis g(f(D))=D.

Caractéristiques de gof

Commencer par montrer que (gof) est un antidéplacement

Or (gof(C))=C signifie que (gof) fixe C. Ce qui permet de conclure que (gof) est une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par C

Mais on a aussi (gof) fixe D. On conclut que (gof) est la symétrie orthogonale d'axe (CD).

c) Forme réduite de l'antidéplacement g :

Vérifier que : $g=S_{(CD)}oS_O$ car $gof=goS_O=S_{(CD)}$

Se rappeler que déterminer la forme réduite de g c'est déterminer la droite Δ et le vecteur $\vec{u}$ tels que

$g = t_{\vec{u}} o S_\Delta = S_\Delta o t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ vecteur nul ou bien $\vec{u}$ vecteur directeur de Δ .

1ère méthode

on a $g= S_{(CD)}oS_o$

Ecrire S_o *comme la composée commutative de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires passant par O.*

L'un de ces deux axes doit être parallèle à (CD) pour obtenir une translation dans la décomposition de g

Ecrire alors g= $S_{(CD)}o(S_{(OJ)}oS_{(OI)})$= $(S_{(CD)}oS_{(OJ)})oS_{(OI)}$= $t_{\overrightarrow{BC}}\, oS_{(OI)}$

2ème méthode

Se rappeler que l'axe d'un antidéplacement passe par le milieu d'un segment formé par un point et son image.

Comme g(A)=C, déduire que $O\in\Delta$

D'autre part, on a g(O)=$(S_{(CD)}oS_o)$(O)=$S_{(CD)}$(O)=O' . Déduire alors que $\vec{u}=\overrightarrow{OO'}$.

Vérifier que $\vec{u}=\overrightarrow{BC}$ et Δ=(OI)

2°)a) Angle et rapport de S :

On a S est une similitude directe telle que

S(A)=B et S(O)=I donc son rapport est $\frac{BI}{AD}$ qui est égal à $\frac{1}{2}$.

Son angle est $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BI}\right)$ dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$

Construction de Ω

On a S(A)=B, donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et par suite Ω appartient à l'ensemble suivant

$$\Gamma=\left\{M\in P/(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$$

on a aussi S(D)=I

En déduire que $\Omega\in\Gamma'$ avec $\Gamma'=\left\{M\in P/(\widehat{\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MI}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$

Vérifier que Γ et Γ' sont deux demi cercles de diamètres respectifs [AB] et [DI].Comme S(A)=B et S(D)=I, vérifier que $\Omega\in\Gamma\cap\Gamma'$

Construire Ω

* On peut procéder autrement pour la construction de Ω

Le rapport de S est égal à $\frac{1}{2}$ donc on a $\frac{\Omega A}{\Omega B}=\frac{1}{2}$ et par suite Ω appartient au cercle de diamètre [GG'] où G est le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,2) et G' est le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,-2)

Construire $\Omega\in\mathcal{C}\cap\Gamma$.

Réponse $S(\Omega,\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})$

b) Images des droites (AC) et (CD) par S

S est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc l'image d'une droite est une droite qui lui est perpendiculaire et passant par l'image de l'un de ses points.

En déduire que S((AC))=(BD) et S((CD))=(OI).

Nature du triangle OΩC

On a : $C\in(AC)\cap(CD)$ En déduire que S(C)=O. Conclure.

c) L'image du carré ABCD

Vérifier que l'image d'un carré par une similitude directe est un carré.

En déduire que l’image du carré ABCD est le carré BJOI.

d) Les points A, W et J sont alignés

Déduire de 2°)c) que : S(B)=J et par suite (ΩB) est perpendiculaire à (ΩJ)
D’autre part S(A)=B et par suite (ΩA) est perpendiculaire à (ΩB). Conclure.
2ème méthode
Montrer que SoS est une similitude directe de centre Ω et d’angle π.
Vérifier que : (SoS)(A)=J

En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega J}}) \equiv p[2p]$
Conclure.