Enoncé

EXERCICE N°1 (6 points)

Soit dans le plan trois points fixes A, B et O alignés et deux à deux distincts. Soit (C) un cercle variable de centre I tangent en O à la droite (AB). Les autres tangentes à (C) issues de A et de B se coupent en M.
On pose OA =a , OB =b et on suppose que a>b.
Le candidat fera une figure pour chacune des trois questions suivantes.

1) On suppose dans cette question que O appartient au segment [AB]
a- Montrer que la différence MA-MB est constante.
b- En déduire que le point M varie sur une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.
c- Déterminer la tangente en M à cette hyperbole.
2) On suppose dans cette question que O n'appartient pas au segment [AB]
a- Montrer que la somme MA+MB est constante.
b- En déduire que le point M varie sur une ellipse dont on précisera les foyers et les sommets du grand axe.
c- Déterminer la tangente en M à cette ellipse.
3) Soit Δ la tangente à (C) parallèle à (AB), l'autre tangente à (C) issue de A coupe Δ en un point N
On désigne par A' le symétrique de A par rapport à O et par (d) la perpendiculaire à (AB) passant par A'.
a- Montrer que le point N varie sur une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.
b- Déterminer la tangente en N à cette parabole.

EXERCICE N°2 (4 points)

1) Soit l'équation :
(E) : $z^3-2(3+i)z^2+(8+9i)z+3-9i=0$
a- Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle α que l'on déterminera, et calculer les deux autres racines z_1 et z_2 avec $|z_1| > |z_2|$.
b- On désigne pr A, B et C les points d'affixes respectives α z_1 et z_2 dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Montrer que le quadrilatère OABC est un rectangle.
2) Soit l'application f : $P \to P$

$$M(z) \to M'(z') \text{ avec } z'=(1+i)z-3i$$

a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
b- Soit O', B', C' les images respectives de O, B, C par f.
Quelle est la nature du quadrilatère O'AB'C' ?

PROBLEME (10 points)

A- Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie dans IR_+^* par

$$f_n(x) = (x-1)^n \text{Log}x$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé R=$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) on pose, pour tout x de , $\varphi_n(x) = n\text{Log}x + 1 - \dfrac{1}{x}$
a- Etudier les variations de φ_n .
b- Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout x strictement positif.
2) a- Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.
b- Tracer, dans le même repère R, les courbes (C_1) et (C_2) en précisant les positions relatives de ces deux courbes.
3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_1) et (C_2).

B- Dans cette partie on se propose d'étudier la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définié par : $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

1) On considère la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par $u_n=\int_1^2 f_n(x)dx$.

Montrer que, pour tout n de IN*, $(n+1)u_n=\text{Log}2-\int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$

En déduire

a- La relation : $\frac{1}{2(n+2)} \leq \text{Log}2-(n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2}$ pour tout n de IN*

b- La limite de $(n+1)\, u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x>0$.

$S_n(x)=1-(x-1)+\ldots+(-1)^n(x-1)^n$

a- Montrer que $S_n(x)=\frac{1}{x}-(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

b- En déduire, en utilisant la première question de la partie B, que pour n élément de IN*.

$\text{Log}2-v_n=(-1)^{n+1}[\text{Log}2-(n+1)u_n]$

3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$