Corrigé du Problème

I) De quoi s'agit-il ?

Fonctions en logarithme :

I. Etude de fonction. Signe de f(x)-x. Position relative d'une courbe et d'une droite. Fonction réciproque.

II. Intégrale de fonction en logarithme. Intégrale de fonction en exponentielle. Interprétation géométrique d'intégrale.

II) Indications et commentaires

1) a) Domaine de définition de f est]0,2[

Il suffit de faire le tableau de signe du trinôme x(2-x) et prendre l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que x(2-x) > 0

b) Tableau de variation de f

Pour dresser le tableau de variation de f, ne pas oublier de mentionner la continuité de f, sa dérivabilité et montrer que $\forall x \in]0,2[\ f'(x) = \dfrac{-2x+2}{x(2-x)}$

Constater que le dénominateur est strictement positif.

* Pour les limites poser X= x(2-x) et constater que $X \to 0^+$ pour $x \to 0^+$ ou $x \to 2^-$

d'où :

x	0		1		2
f'(x)	‖	+	0	−	‖
f(x)	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖

2) a) La droite d'équation x=1 est un axe de symétrie

Appliquer la règle générale et montrer que :

Si $x \in D_f$ alors $(2-x) \in D_f$ et f(2-x) = f(x) c'est-à-dire si 0<x<2 alors 0<2-x<2 ;

Calculer f(2-x)

b) Abscisses de points d'intersection de (C) avec $(0, \vec{i})$

<u>Rappel</u> : les abscisses des points d'intersection de (C) avec $(0, \vec{i})$ sont les solutions de l'équation f(x) = 0

Poser f(x) = 0 et résoudre l'équation du 2^d degré obtenue e^{-1}

* On trouve : $x' = +1 - \sqrt{1-e^{-1}}$ et $x'' = +1 + \sqrt{1-e^{-1}}$

* Remarquer que x'<x'' donc $x_0 = x' = 1 - \sqrt{1-e^{-1}}$

3) a) Tableau de variation de φ : $\varphi(x) = f(x) - x$

Dans le cas présent : ne pas oublier que φ est continue et dérivable sur]0,2[car f l'est.

Calculer alors φ'(x) et étudier son signe. Les limites sont évidentes.

<u>Remarque</u> : $\forall x \in]0,2[\varphi'(x) = f'(x)-1$.

x	0		$2-\sqrt{2}$		2
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi'(2-\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\infty$

b) L'équation j **(x)=0 admet exactement 2 solutions 1 et** a **:**

***** Vérifier d'abord (par calcul) que $\varphi\,(2-\sqrt{2})>0$

D'où $0 \in\ ]-\infty,\varphi(2-\sqrt{2})]$ qui est à la fois $\varphi(]0,2-\sqrt{2}\,])$ et $\varphi([2-\sqrt{2}\,,2[)$ donc sur $]0,2-\sqrt{2}\,]$ admet un antécédent unique par φ . De même que sur $[2-\sqrt{2}\,,2[$

<u>Remarquer</u> que $\varphi(1) = f(1)-1 = 0$ donc 1 est une solution.

Or $1 \in\ ]2-\sqrt{2}\,,2[$ donc la 2è solution $\alpha \in]0, 2-\sqrt{2}\,[$

* <u>$x_0<\alpha<0{,}3$</u> :

<u>Remarquer</u> $x_0 = 1-\sqrt{1-e^{-1}} < 0{,}3$

Calculer alors $\varphi(x_0)$ et $\varphi(0{,}3)$ et vérifier qu'ils sont de signes contraires. D'où le résultat.

* <u>Log $[\alpha(2-\alpha)]= \alpha-1$</u>

Ecrire $\varphi(x) = 0$ et déduire le résultat

c) signe de j **(x) et position de (C) par rapport à la droite** (D) **d'équation x = 1**

Les questions a) et b) permettent de conclure que :

Pour $x \in\ ]0,\alpha[\ \ \varphi(x) < 0$ donc $f(x) < x$. La courbe (C) est au dessous de (Δ) .

En faisant le même raisonnement on obtient

- Pour $x \in\ ]\alpha,1[$ la courbe (C) est au dessus de (Δ).
- Pour $x \in\ ]1,2[$ la courbe(C) est au dessous de (Δ).
- Pour $x=\alpha$ et pour $x=1$ la courbe (C) rencontre (Δ).

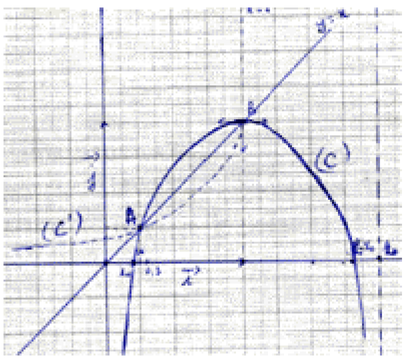
<u>Remarque</u> : les points d'intersection sont $A(\alpha,\alpha)$ et $B(1,1)$.

4) Tracé de (C) et D

Tenir compte du résultat obtenu en 3) c).

Remarquer que l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=2 sont des asymptotes à (C).

Ne pas oublier la consigne sur l'unité et celle sur α.



5) a) g = restriction de f à I =]0,1] réalise une bijection de I sur J

Il suffit d'appliquer le théorème :
si g est continue et strictement monotone sur un intervalle I de IR alors g réalise une bijection de I sur g(I) qui est un intervalle.

Dans le cas présent g est strictement croissante sur I=]0,1] donc g(I)= $\left]\lim_{0+} g, g(1)\right] = \left]-\infty,1\right]$

d'où J= $\left]-\infty,1\right]$

b) Calcul de $g^{-1}(x)$ pour x Î J

<u>Appliquer</u> $x \in J = f(I)$ et $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow y \in I$ et $x = g(y)$
En posant x = g(y) prouver que $y = 1-\sqrt{1-e^{x-1}}$ d'où $g^{-1}(x) = 1-\sqrt{1-e^{x-1}}$
<u>Remarque</u> : l'équation admet deux solutions dont l'une seulement est valable (voir la condition $y \in I$)

c- Courbe (C') : voir figure.

(C') est symétrique de la partie de C correspondant à]0,1] par rapport à (Δ). Ne pas oublier les intersections de C et C' (qui sont celles de (Δ) et (C)).

II) 1) a- E= $\int_{\alpha}^{1} \mathrm{Log}[x(2-x)]dx$
Penser à choisir u'(x) = 1 et v(x) = log[x(2-x)] pour appliquer
$\int_a^b u'.v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx$
Ne pas oublier de remplacer $\mathrm{Log}\,a$ (2-α) par α -1 (I.3)b)

b) E = $-a^2 + 5a - 4 - 2\log a$
Il suffit d'intégrer $\int_a^1 \frac{1-x}{2-x}dx$ en appliquant la consigne donnée par l'énoncé $\left(\frac{1-x}{2-x} = 1 - \frac{1}{2-x}\right)$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale $\left(\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right)$

2) a) Interprétation géométrique de chacune des intégrales données

* $\int_{\alpha}^{1} (f(x)-x)dx$ est la mesure de l'aire du domaine compris entre la courbe (C) et la droite (Δ), exprimée en unités d'aire.
* $\int_a^1 \left(x-g^{-1}(x)\right)dx$ est la mesure de l'aire du domaine compris entre (C ') et (Δ)

Puisque $C' = s_{\Delta}(C)$ et $(\Delta) = s_{\Delta}(\Delta)$ donc les 2 aires sont égales (la symétrie orthogonale conserve les distances et par suite les mesures d'aires).
D'où :
$\int_{\alpha}^{1} \left(x-g^{-1}(x)\right)dx = \int_{\alpha}^{1} (f(x)-x)dx$

b) Calcul de l'intégrale $\int_a^1 \sqrt{1-e^{x-1}}dx$

En remplaçant $g^{-1}(x)$ par son expression (5-b) ; déduire que $\int_\alpha^1 \sqrt{1-e^{x-1}}dx = 2\int_\alpha^1 (1-x)dx + E$

D'où on peut retrouver que $\int_\alpha^1 \sqrt{1-e^{x-1}}dx = 3\alpha - 3 - 2\mathrm{Log}\alpha$.