Enoncé

EXERCICE N°1 (6 points)

L'espace ε étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on désigne par S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$$

1) Montrer que S est une sphère de centre Ω (0, 2, 0) et de rayon 3 .

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x - 2y + z - 2 = 0$

Déterminer la position relative de S et P . Caractériser $S \cap P$.

3) Soit P_m le plan dont une équation cartésienne est :

$$2mx + (1 - 2m)y + mz + 1 - 2m = 0$$

a - Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad ; \quad \lambda \in IR$$

Vérifier que la droite Δ est incluse dans P_m .

b - Calculer la distance $d(\Omega, P_m)$ du point Ω au plan P_m .

c - Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S . Préciser les coordonnées du point de contact .

EXERCICE N°2 (5 points)

1) a - Résoudre dans C , l'équation d'inconnue z suivante :

$$z^2 - 2i.z - 2 = 0$$

b - Mettre les solutions sous forme trigonométrique .

2) Soit θ un réel de l'intervalle]0 , π [, on considère l'équation d'inconnue z complexe :

$$(E) \qquad z^2 - 2.e^{i\theta}.z + e^{2i\theta} - 1 = 0$$

Résoudre l'équation (E) .

3) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_1 = 2.e^{i\theta} \quad ; \quad z_2 = 1 + e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z_3 = -1 + e^{i\theta} \ .$$

a - Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle .

b - Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle .

c - Déterminer le réel θ de $]0, \pi[$ tel que OBAC soit un carré.

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie sur **IR** par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

I - 1) a - Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Interpréter géométriquement le résultat .

b - Montrer que pour tout réel x , on a : $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

c - Montrer que f est impaire .

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point O .

4) a - Montrer que pour tout réel t, on a :

$$f'(t) \leq \frac{1}{2} \qquad (1)$$

et en déduire que pour tout réel positif x on a :

$$f(x) \leq \frac{1}{2} x \ .$$

(On pourra intégrer les deux membres de l'inégalité (1) sur un intervalle convenablement choisi).

5) Construire (T) et (C) ainsi que les asymptotes de (C).

6) a - Soit λ un réel strictement négatif , calculer, en cm^2 , la mesure $A(\lambda)$ de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $y = -1$; $x = \lambda$ et $x = 0$.

b - Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

7) a - Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie , continue et dérivable sur $]-1 , 1[$.

b - Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C') , représentative de f^{-1}

c - Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in]-1 , 1[$.

II - On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^{\text{Log}2} f^{2n}(x)dx$$

1) a - Montrer que, pour tout réel x , on a : $f^2(x) = 1 - 2f'(x)$

b - Calculer u_1

2) a - Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$f^{2n}(x) \leq \frac{x^{2n}}{2^{2n}}$$

b - Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{(\text{Log}2)^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$